

① (1) a, b, c, d を整数とすると ($bd \neq 0$)

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ は有理数である。

このとき

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

であり、 $bd, ad+bc$ も整数なので、 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ は有理数である。

よって、有理数の和は有理数である。

(2) 反例

$\{r_n\} \in$

$$r_n = \left(\begin{array}{l} \sqrt{2} \text{ を無限小数で書いたときの} \\ \text{小数第 } n-1 \text{ 位の数} \end{array} \right)$$

と置く。ただし、 $r_1 = 1$ とする。

このとき、

$$s_n = \frac{r_n}{10^{n-1}}$$

とすると、 $\{s_n\}$ は有理数の数列だが

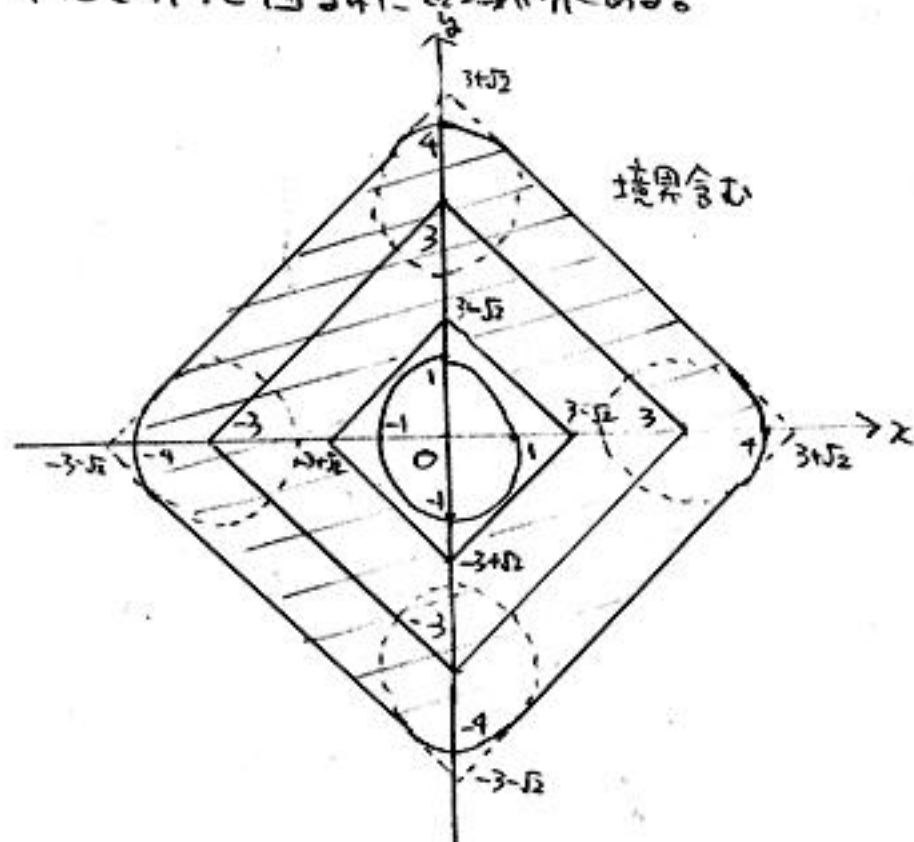
$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \sqrt{2}$$

となり、無理数である。

証明の間違いについて

すべての自然数 n について成立する ということか
いえてないのに $n \rightarrow \infty$ としたところ。

- ② (1) 点Rは $|x|+|y|=3$ から距離1だけ離れた直線と $(3,0), (0,3), (-3,0), (0,-3)$ を中心とした半径1の円で囲まれた領域内にある。



この領域の面積は

$$\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})^2 \times 4 - \frac{1}{2}(3-\sqrt{2})^2 \times 4 - 4(1 - \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2)$$

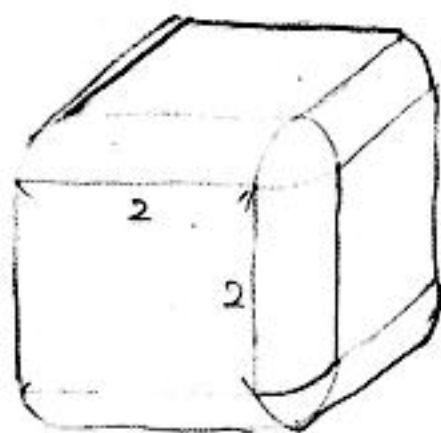
$$= 24\sqrt{2} - 4 + \pi //$$

(2) 求める体積は

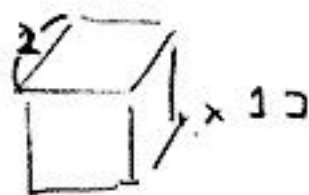
$$2^3 + 2 \times 2 \times 1 \times 6 + \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 \times 8 + \frac{1}{4} \pi \cdot 1 \times 2 \times 12$$

$$= 32 + \frac{22}{3}\pi$$

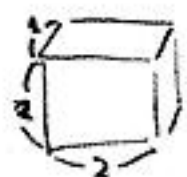
できる領域は下図のようもの



分解図



$$\times 1 \text{ 個 } \text{体積 } 2^3 = 8$$



$$\times 6 \text{ 個 } \text{体積 } 2 \times 2 \times 1 \times 6 = 24$$



$$\times 8 \text{ 個 } \text{体積 } \frac{\pi \cdot 1^2}{4} \times 2 \times 12 = 6\pi$$



$$\times 8 \text{ 個 } \text{体積 } \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 \times 8 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\boxed{3} \quad a_n = n \cdot 3^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

と表せるので

$$S_n = 1 \cdot 3^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + 2 \cdot 3^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + (n-1) \cdot 3^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) + n \cdot 3^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$= 1 \cdot 3^1 \cdot \frac{1}{3} + (2 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^1) \frac{1}{5} + \dots + \{ n \cdot 3^n - (n-1) \cdot 3^{n-1} \} \frac{1}{2n+1} - \frac{n \cdot 3^n}{2n+3}$$

$$= 1 + 3 + \dots + 3^{n-1} - \frac{n \cdot 3^n}{2n+3}$$

$$= \frac{3^n - 1}{3 - 1} - \frac{n \cdot 3^n}{2n+3}$$

$$= \frac{3^n(2n+3) - 2 \cdot n \cdot 3^n}{2(2n+3)} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3^{n+1}}{2(2n+3)} - \frac{1}{2}$$

となり、与式は成立する。