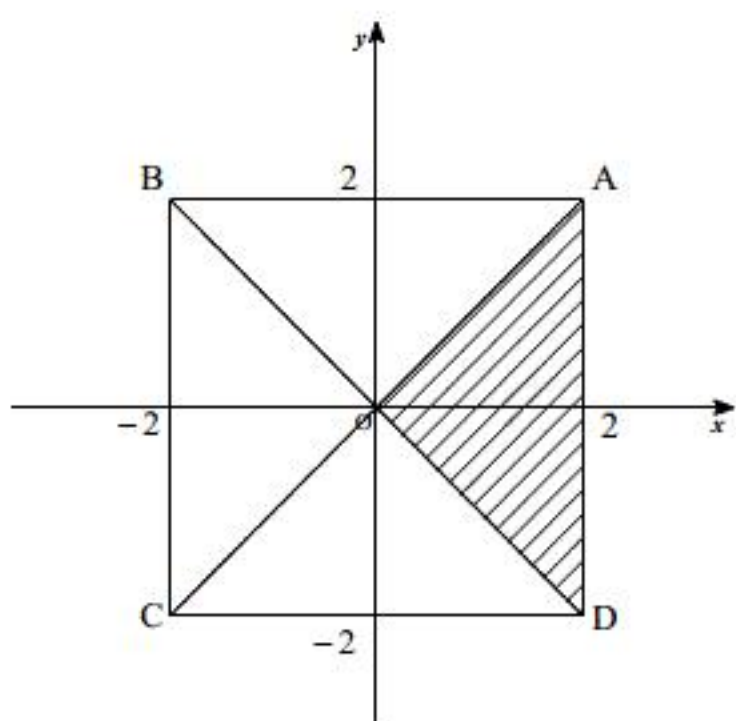


1

(1)

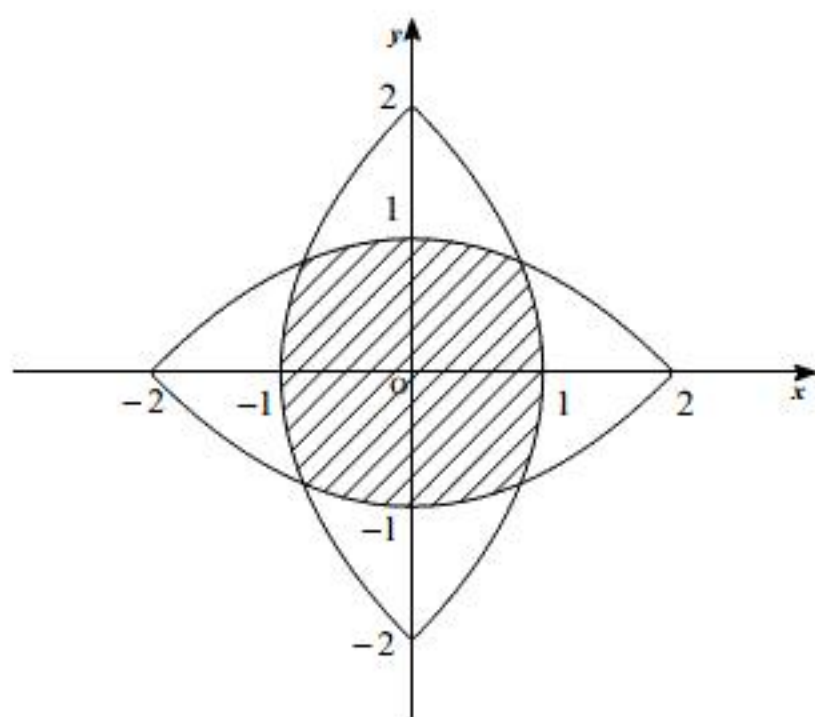


点Pの座標を (x, y) とおく。正方形ABCDの対称性により、上図の斜線部の領域のみ考えれば十分である。この領域は $-x \leq y \leq x$, $0 \leq x < 2$ と書ける。点Pがこの領域内にあるとき、正方形の4つの辺のうち、点Pとの距離が最も小さくなるのは辺ADであり、その距離は $2-x$ となる。よって求める条件は

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 2 - x$$

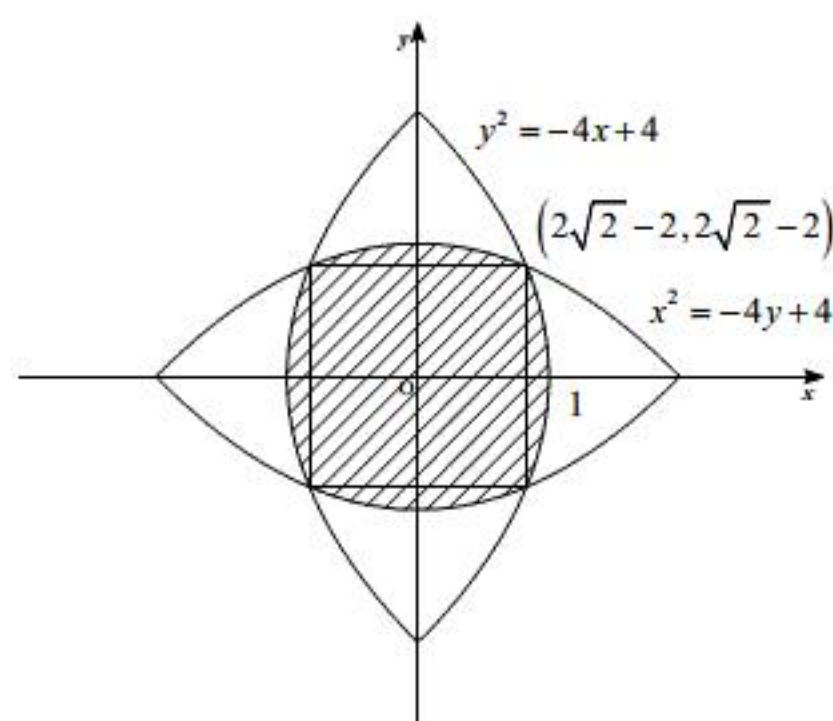
$$\therefore y^2 < -4x + 4$$

となる。したがって、対称性より、求める領域は以下の図の斜線部になる。ただし、境界を含まない。



(答) 前図の斜線部分。ただし、境界を含まない。

(2)



上図のように、正方形部分とその周りに分けて考える。2つの方程式

$$\begin{cases} y^2 = -4x + 4 \\ x^2 = -4y + 4 \end{cases}$$

を $x > 0, y > 0$ の範囲で解くと、 $(x, y) = (2\sqrt{2} - 2, 2\sqrt{2} - 2)$ となる。よって求める面積は上図より

$$\begin{aligned} \left\{ 2(2\sqrt{2} - 2) \right\}^2 + 4 \left\{ 2 \int_{2\sqrt{2}-2}^1 \sqrt{4-4x} \, dx \right\} &= 4(2\sqrt{2} - 2)^2 + \frac{32}{3}(\sqrt{2} - 1)^3 \\ &= \frac{16}{3}(4\sqrt{2} - 5) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{16}{3}(4\sqrt{2} - 5)$

【解答】

ア -5 イ 3 ウ 1 エ -2

あ (b) い (a) う (g) え (f)

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(x^2-2x-11)+e^{\frac{1}{2}x}(2x-2) \\
 &= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}(x+5)(x-3)
 \end{aligned}$$

$y'=0$ のとき $x=-5, 3$ となる。よって増減表は次のようになる。

x	...	-5	...	3	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $x=-5$ で極大値をとり、 $x=3$ で極小値をとる。

(2)

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$ より $-\frac{\pi}{2} \notin A$ となる。よって $-\frac{\pi}{2} \notin (A \cap B)$ となる。

$\sin(1.05)>0$ より $1.05 \in A$ となる。よって $1.05 \in A \cup B$ となる。

$y=xe^x$ は $x<0$ のとき負になるので B に含まれ、 $x>0$ のとき単調増加になる。また、 $x=1$ のとき $y=e<3$ となるので、 $0 \leq x \leq 1$ は B に含まれる。一方、 $C=\{x|-1 \leq x \leq 1\}$ であるので、 $B \supset C$ となる。

(3)

[1] $a<0$ のとき

$$\begin{aligned}
 F(a) &= \int_1^e (\log x - a) dx \\
 &= -(e-1)a + 1
 \end{aligned}$$

[2] $0 \leq a < 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 F(a) &= -\int_1^{e^a} (\log x - a) dx + \int_{e^a}^e (\log x - a) dx \\
 &= 2e^a - (e+1)a - 1
 \end{aligned}$$

[3] $a \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 F(a) &= -\int_1^e (\log x - a) dx \\
 &= (e-1)a - 1
 \end{aligned}$$

以上[1], [2], [3]より $F(1)=e-2$ となる。

次に最小値を求める。

[1] $a<0$ のとき

$F(a)$ は単調減少なので、 $F(0)=1$ が最小になる。

[2] $a \geq 1$ のとき

$F(a)$ は単調増加なので、 $F(1)=e-2$ が最小になる。

[3] $0 \leq a < 1$ のとき

$F'(a)=2e^a-(e+1)$ より増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\log \frac{e+1}{2}$	...	1
$F'(a)$		-	0	+	
$F(a)$	1	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

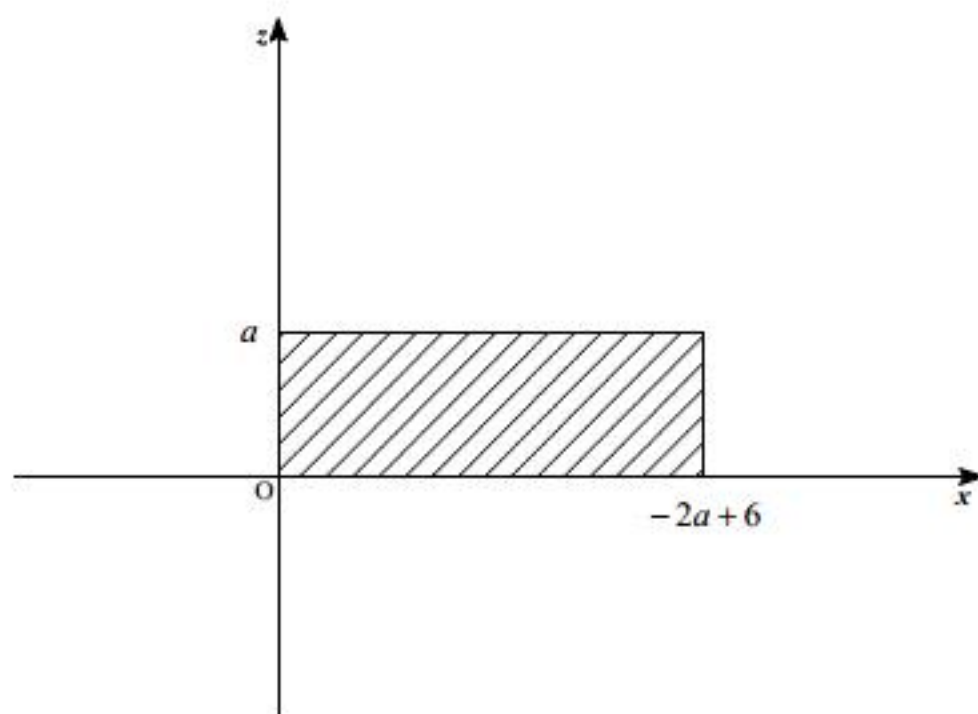
表より $a = \log \frac{e+1}{2}$ のときが最小になる。

以上[1], [2], [3]より $F(a)$ は $a = \log \frac{1+e}{2}$ のとき最小になる。

【解答】

オ -2 カ 6 キ 45 ク 5 ケ -24
 コ 36 サ 5 シ -12 ス 5

【解説】



$y = a$ による立体の断面は上図のようになるので、求める面積は $-2a^2 + 6a$ となる。上図の長方形を原点周りに 1 回転させたものが V の $y = a$ での断面になる。その面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \pi \{ a^2 + (-2a + 6)^2 \}$$

となる。よって V の体積は

$$\begin{aligned} \int_0^3 S(a) da &= \pi \int_0^3 (5a^2 - 24a + 36) da \\ &= 45\pi \end{aligned}$$

となる。 V の xy 平面での切り口の形は

$$\begin{cases} y = a \\ x = \pm \sqrt{5a^2 - 24a + 36} \end{cases} \quad 0 \leq a \leq 3$$

でパラメータ表現される曲線になる。 a を消去すると

$$x^2 = 5y^2 - 24y + 36$$

となる。これを変形すると

$$\frac{x^2}{\frac{36}{5}} - \frac{\left(y - \frac{12}{5}\right)^2}{\frac{36}{25}} = 1$$

となるので、漸近線は $x = \pm \sqrt{5} \left(y - \frac{12}{5} \right)$ となる。

【解答】

セ	-14	ソ	21	タ	3	チ	5	ツ	14	テ	-21
ト	2	ナ	-2	ニ	4	ヌ	-2	ネ	3	ノ	1
ハ	2	ヒ	3	フ	0	ヘ	2	ホ	1		

【解説】

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より

$$(AB)^2 - 14(AB) + 21E = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。これに左から A^{-1} を、右から A をかけると

$$(BA)^2 - 14(BA) + 21E = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。一方、 BA についてのケーリー・ハミルトンの定理より

$$(BA)^2 - (9+y)(BA) + (9y-8x)E = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となり、 BA は E の実数倍でないことから、②と③を係数比較すると $x=3, y=5$ を得る。

(2)

① $\times(AB)^n - \textcircled{2}\times(BA)^n$ より

$$(AB)^{n+2} - (BA)^{n+2} = 14\{(AB)^{n+1} - (BA)^{n+1}\} - 21\{(AB)^n - (BA)^n\}$$

を得る。

(3)

(2)の結果に $n=1$ を代入し、①と②より $(AB)^2, (BA)^2$ を消去して

$$\begin{aligned} (AB)^3 - (BA)^3 &= 175(AB - BA) \\ &= 175 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。

(4)

仮定より $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ とおくと、 $(AB)A = A(BA)$ より

$$\begin{cases} 11a + c = 9a + 8b \\ a + 11b = 3a + 5b \\ 12a + 3c = 8a + 9c \\ 3a + 12b = 5a + 3c \end{cases}$$

$$\therefore b = \frac{a}{3}, c = \frac{2}{3}a$$

となるので、 $A = \begin{pmatrix} a & \frac{a}{3} \\ \frac{2}{3}a & a \end{pmatrix}$ とかける。

よって

$$\begin{aligned} B &= A^{-1}(AB) \\ &= \frac{3}{a} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、仮定より $a=3$ となるので、

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。