

(2005年度)

6 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は7ページ，3問である。)

「受験についての注意」「マークによる数値解答欄についての注意」が，次の2，3ページにある。試験開始3分前に監督からの指示があるので，それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはいけない。
6. 筆記具は、HBの黒鉛筆とHBのシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはいけない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場することはできない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1 (1) 2 次方程式 $x^2 + 5x + 3 = 0$ の 2 つの解を α, β とする。

(i) $\alpha^2 + 4\alpha + \beta, \beta^2 + 4\beta + \alpha$ を 2 つの解とする 2 次方程式で, x^2 の係数が 1 となるものは

$$x^2 + \boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}} = 0$$

である。

(ii) はじめの 2 次方程式 $x^2 + 5x + 3 = 0$ の 2 つの解が $\alpha^2 + p\alpha + q, \beta^2 + p\beta + q$ と表されるならば

$p = \boxed{\text{ウ}}, q = \boxed{\text{エ}}$ または $p = \boxed{\text{オ}}, q = \boxed{\text{カ}}$ である。

ただし, $\boxed{\text{ウ}} < \boxed{\text{オ}}$ とする。

(2) 実数 x, y について, $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 16$ が成り立つとする。

(i) $x + y = u, xy = v$ とおくと, $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 16$ は

$$v = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}u^2 + \boxed{\text{ケ}} \dots\dots \textcircled{1}$$

と表せる。また, t に関する 2 次方程式 $t^2 - ut + v = 0$ が実数解 x, y をもつので, u, v は $u^2 - 4v \geq 0$ をみたす。この不等式に ①を代入して得られる 2 次不等式を解けば

$$\boxed{\text{コ}} \leq u \leq \boxed{\text{サ}}$$

である。

(ii) xy のとり得る値の範囲は, $\boxed{\text{シ}} \leq xy \leq \boxed{\text{ス}}$ である。

2 $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = (x - a)^3 - (x - a)$ とする。ただし, $a > 0$ とする。

(1) $a = 1$ のとき, 2 つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれる図形の面

積は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(2) $|f(x) - g(x)|$ の最小値は,

$0 < a \leq \boxed{\text{タ}}$ のとき, $\boxed{\text{チ}}$ であり,

$\boxed{\text{タ}} < a$ のとき, $\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a^3 + \boxed{\text{ト}}a^2 + \boxed{\text{ナ}}a + \boxed{\text{ニ}}$ である。

(3) $a = \boxed{\text{タ}}$ のとき,

$$\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = \boxed{\text{ヌ}}$$

である。

3

袋の中に、青、赤、黄の3つの球が入っている。また箱の中に青、赤の球が入っている。この袋から1つの球を取り出す。

- 取り出した球の色が青ならば、2点獲得して、その青い球を箱の中に入れ、箱の中の赤い球を袋に入れる。
- 取り出した球の色が黄ならば、1点獲得して、その黄色の球を袋に戻す。
- 取り出した球の色が赤ならば、獲得点0で、その赤い球を箱の中に入れ、箱の中の青い球を袋に入れる。

n 回目 ($n \geq 2$) の試行では、($n-1$) 回目の試行で得られた袋より球を取り出し、1回目の試行と同様に点を獲得し、袋の中の球を出し入れする。ここで、袋の中の3つの球のうちの1つを取り出す確率は、球によらず等しく $\frac{1}{3}$ とする。

たとえば最初に黄色の球を取り出せば、1点獲得して、黄色の球を袋に戻すから袋の中は「青、赤、黄」となる。2回目にこの袋から赤い球を取り出せば、獲得点0で青い球を袋に入れる。この2回の試行での獲得点の合計は1点となり、袋の中は、「青、青、黄」となっている。

(1) 次に述べてあることが正しければ、解答欄の ○ に、正しくなければ、解答欄の × にマークせよ。

(あ) 3 回目の試行で、獲得点の合計が4点となるのは、毎回の試行で「青があれば、青、なければ、黄」が取り出された場合に限る。

(い) 3 回目の試行で、獲得点の合計が4点となったとする。このとき3 回目の試行で得られた袋の中身は、必ず「赤、赤、黄」となっている。

(う) 3 回目の試行で得られた袋の中身が「赤、赤、黄」であれば、獲得点の合計は4点である。

(2) 3 回目の試行で獲得点の合計が 4 点となる確率は $\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$,

2 点となる確率は $\frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。また 3 回目の試行の後、袋の中が

「青, 赤, 黄」となる確率は $\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

(3) n 回目の試行の後、袋の中に「赤, 赤, 黄」の球がある確率を p_n , 「青, 赤, 黄」の球がある確率を q_n , 「青, 青, 黄」の球がある確率を r_n とする。 p_n, q_n, r_n に関する漸化式は

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{3} (p_n + q_n) \\ q_{n+1} &= \frac{1}{3} (\boxed{\text{ホ}} p_n + \boxed{\text{マ}} q_n + \boxed{\text{ミ}} r_n) \\ r_{n+1} &= \frac{1}{3} (q_n + r_n) \end{aligned}$$

である。この漸化式と、 $p_1 = q_1 = r_1 = \frac{1}{3}$ より、 $p_n = r_n$ となることがわかる。さらに $p_n + q_n + r_n = 1$ であるから、 q_n に関する漸化式

$$q_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}} + \frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}} q_n$$

が得られる。