

(2005年度)

8 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ，4問である。)

「受験についての注意」「マークによる数値解答欄についての注意」が，次の2，3ページにある。試験開始3分前に監督からの指示があるので，それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはいけない。
6. 筆記具は、HBの黒鉛筆とHBのシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはいけない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場することはできない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○		

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○		

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

ア から ワ には当てはまる数値を, あ から お には選択肢から適当なものを, それぞれマークせよ。ただし, π は円周率とする。

1 線分 AB を直径とし, 中心を O とする半径 3 の円を考える。この円周上に A, B と異なる点 C をとり, 点 C における接線が, A および B における接線と交わる点をそれぞれ P, Q とする。 $\angle CAB = \theta$ とおく。

(1) OP の長さは ア $\times$ あ である。BQ の長さは イ $\times$ い である。PQ の長さは ウ $\times$ う である。

(2) $\triangle ABC$ の面積は エ $\times$ え である。 $\triangle OPQ$ の面積は オ $\times$ お である。

(3) $\triangle OPQ$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の 2 倍となるときの最も大きい θ は カ $\div$ キ π である。ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

あ から お の選択肢

(a) $\sin \theta$	(b) $\frac{1}{\sin \theta}$	(c) $\sin 2\theta$	(d) $\frac{1}{\sin 2\theta}$
(e) $\cos \theta$	(f) $\frac{1}{\cos \theta}$	(g) $\cos 2\theta$	(h) $\frac{1}{\cos 2\theta}$
(i) $\tan \theta$	(j) $\frac{1}{\tan \theta}$	(k) $\tan 2\theta$	(l) $\frac{1}{\tan 2\theta}$

- 2 (1) $y = e^{-\frac{3}{4}x} \sin x$ が $x = \alpha$ で極小値をとるとき、

$$\tan \alpha = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}, \quad \sin \alpha = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

- (2) 複素数 $z = x + yi$, $w = 1 + 2i$ を考える。ただし、 x, y は実数で $x > 0$ とし、 i は虚数単位とする。 z の虚部 y を定数とすると、 $x \times \left| \frac{1}{z+w} \right|^2$ を最大にする x は

$$\sqrt{\boxed{\text{シ}} y^2 + \boxed{\text{ス}} y + \boxed{\text{セ}}}$$

である。

- (3) $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x + 1}$ の最大値が 3、最小値が $\frac{1}{3}$ である。このとき $(a, b) = \left(\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}} \right)$ または $\left(\boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}} \right)$ である。ただし、 $\boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{チ}}$ とする。

- 3 3 次関数 $y = x^3 + 3ax^2 + bx$ のグラフを C とする。傾き m の接線が C に 2 本引けるとき、その 2 接点を結ぶ直線の傾きを $k(m)$ とする。

(1) 傾き m の接線が C に 2 本引けるための必要十分条件は

$$m > \boxed{\text{テ}} a^2 + \boxed{\text{ト}} b$$

である。

$$(2) k(m) = \boxed{\text{ナ}} a^2 + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} b + \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} m \text{ である。}$$

以下では、 a, b が $k(0) = -2$ を満たすときについて考える。

(3) この 3 次関数は $x = \boxed{\text{ハ}} a + \boxed{\text{ヒ}}$ のとき 極大値をとる。

(4) この 3 次関数の極大値と極小値の差は $\boxed{\text{フ}}$ である。

(5) さらに $a = 0$ のときについて考える。 C の接線のうちで傾きが最小となるものを l_1 とすると、その方程式は $y = \boxed{\text{ヘ}} x + \boxed{\text{ホ}}$ である。 C が極大となる点での接線を l_2 とすると、 l_1, l_2 と C で囲

まれた図形のうちで小さい方の面積は $\frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ である。

4 $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 漸化式 $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) を考える。

(i) $x_2 = 30, x_3 = -6$ となるとき, $x_1 = \boxed{\Delta}$, $y_1 = \boxed{\times}$ である。

(ii) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ a \end{pmatrix}$ とするとき, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ となるのは,
 $(t, a) = \left(\boxed{\text{モ}}, \boxed{\text{ヤ}} \right)$ または $\left(\boxed{\text{ユ}}, \boxed{\text{ヨ}} \right)$

のときである。ただし, $\boxed{\text{モ}} < \boxed{\text{ユ}}$ とする。

(2) $a = \boxed{\text{ヨ}}$ ((1) で求めた値) とし, 漸化式

$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{18} A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ a \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) を考える。

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とするとき,

$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}} \left(1 - \left(\frac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}} \right)^{k-1} \right) \begin{pmatrix} 12 \\ a \end{pmatrix}$ である。

(3) 漸化式 $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{18} A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)
 を考える。

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とするとき, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{\boxed{\text{ロ}}}{\boxed{\text{ワ}}}$ である。