

(2005年度)

10 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は 6 ページ, 3 問である。)

「受験についての注意」が次ページにある。試験開始 3 分前に監督からの指示があるので, それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の**右側のみ**ミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
4. 左側のミシン目は切り離してはならない。
5. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
6. 各問題に対する解答は、その問題番号が記された解答用紙に記入すること。
足りない場合は、その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には、何も書いてはいけない。
7. マーク式解答用紙には何も記入しないこと。
8. 解答用紙を、切り離してはいけない。採点が不可能になる。
9. 筆記具は、**HBの黒鉛筆とHBのシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはいけない。
10. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
11. 試験時間中に退場することはできない。
12. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
13. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

以 下 余 白

1 (1) 2つの有理数の和は、また有理数であることを示せ。

(2) 次の命題 (P) とその証明を考える。

(P) : $q_1, q_2, q_3, \dots$ が有理数であるとき,
その無限和 $\sum_{i=1}^{\infty} q_i$ は有理数である。

証明 : q_1, q_2 が有理数だから、 $q_1 + q_2$ は有理数である。

そこで n を 2 以上の自然数とし、

$Q = \sum_{i=1}^n q_i$ が有理数であると仮定する。

このとき、 $\sum_{i=1}^{n+1} q_i = Q + q_{n+1}$ であり、

Q も q_{n+1} も仮定によって有理数だから、

$\sum_{i=1}^{n+1} q_i$ もまた有理数である。

したがって数学的帰納法により、 $\sum_{i=1}^{\infty} q_i$ は有理数である。

実は命題 (P) は間違っている。反例を示した上で、上の証明のどこが間違っているかを説明せよ。

- 2** (1) xy 平面で、動点 P は集合 $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ を、動点 Q は集合 $N = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 3\}$ を動くとする。このとき、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ で表される点 R が動いてできる図形を図示し、その面積を求めよ。ただし、 O は原点とする。
- (2) xyz 空間で、動点 P は集合 $M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ を、動点 Q は集合 $N = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ を動くとする。このとき、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ で表される点 R が動いてできる図形の体積を求めよ。ただし、 O は原点とする。

3 自然数 n に対し

$$a_n = \frac{2n \cdot 3^n}{(2n+1)(2n+3)}$$

とおき,

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

とする。このとき,

$$S_n = \frac{3^{n+1}}{2(2n+3)} - \frac{1}{2}$$

であることを示せ。