

(2005年度)

7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ，4問である。)

「受験についての注意」「マークによる数値解答欄についての注意」が，次の2，3ページにある。試験開始3分前に監督からの指示があるので，それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはいけない。
6. 筆記具は、HBの黒鉛筆とHBのシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはいけない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場することはできない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0 または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

から には当てはまる数値を, から には選択肢から最もふさわしいものを, それぞれマークせよ。ただし, π は円周率とする。

1 (1) $y = e^{\frac{1}{2}x}(x^2 - 2x - 11)$ は $x =$ で極大値をとり, $x =$ で極小値をとる。

(2)

$$A = \{x \mid \sin x > 0\}, \quad B = \{x \mid xe^x \leq 3\}, \quad C = \{x \mid x^2 \leq 1\}$$

とすると,

$$-\frac{\pi}{2} \quad \text{あ} \quad A \cap B, \quad 1.05 \quad \text{い} \quad A \cup B, \quad B \quad \text{う} \quad C$$

が成り立つ。

から の選択肢:

(a) $\in$ (b) $\notin$ (c) $\ni$ (d) $\nexists$ (e) $=$ (f) $\subset$ (g) $\supset$

(3)

$$F(a) = \int_1^e |\log x - a| dx$$

とする。 $F(1) =$ $e +$ である。また, F が最小値をとるのは $a =$ のときである。

の選択肢:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\log(1+e)$ (c) $\log\left(1+\frac{e}{2}\right)$ (d) $\log\left(\frac{1}{2}+e\right)$
 (e) $\frac{1}{e}$ (f) $\log\frac{1+e}{2}$ (g) $\frac{1}{2}\log(1+e)$

- 2 xyz 空間の 4 点 $O(0,0,0)$, $A(6,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,3,3)$ を頂点とする三角錐 $OABC$ を考える。 $0 < a < 3$ のとき、平面 $y = a$ による三角錐 $OABC$ の断面の面積は

$$\boxed{\text{オ}} a^2 + \boxed{\text{カ}} a$$

である。また、三角錐 $OABC$ を y 軸の周りに回転してできる回転体 V の体積は $\boxed{\text{キ}} \pi$ である。

回転体 V の xy 平面による断面は、双曲線

$$H : x^2 = \boxed{\text{ク}} y^2 + \boxed{\text{ケ}} y + \boxed{\text{コ}}$$

と 2 直線 $y = 0$, $y = 3$ とで囲まれる図形であり、 H の漸近線は、

$$x = \pm \sqrt{\boxed{\text{サ}}} \left(y + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \right)$$

で表される 2 直線である。

3 2×2 行列 A, B が,

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 9 & x \\ 8 & y \end{pmatrix}$$

を満たしている。

(1)

$$(BA)^2 + \boxed{\text{セ}} (BA) + \boxed{\text{ソ}} E = O$$

が成り立つ。ただし、 E は単位行列、 O は零行列である。これから、

$$x = \boxed{\text{タ}}, y = \boxed{\text{チ}} \text{ がわかる。}$$

(2) $n \geq 1$ に対して

$$(AB)^{n+2} - (BA)^{n+2} =$$

$$\boxed{\text{ツ}} \left((AB)^{n+1} - (BA)^{n+1} \right) + \boxed{\text{テ}} \left((AB)^n - (BA)^n \right)$$

が成り立つ。

(3)

$$(AB)^3 - (BA)^3 = 175 \times \begin{pmatrix} \boxed{\text{ト}} & \boxed{\text{ナ}} \\ \boxed{\text{ニ}} & \boxed{\text{ヌ}} \end{pmatrix}$$

である。

(4) A, B の成分は負でない整数とする。また、 A の対角成分は等しいとする。行列の積に関する結合則 $(AB)A = A(BA)$ を用いることで、

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ネ}} & \boxed{\text{ノ}} \\ \boxed{\text{ハ}} & \boxed{\text{ネ}} \end{pmatrix}$$

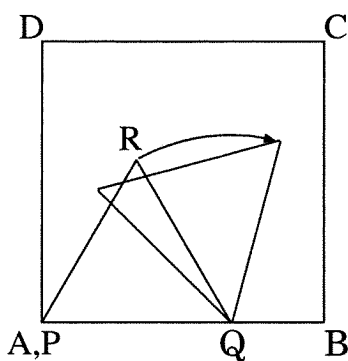
がわかる。よって、

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ヒ}} & \boxed{\text{フ}} \\ \boxed{\text{ヘ}} & \boxed{\text{ホ}} \end{pmatrix}$$

となる。

- 4 図のように、一辺の長さが a の正方形 ABCD の内部に、一辺の長さが 4 の正三角形 PQR が接している。ただし、 $a > 4$ とする。はじめ、頂点 A と P とが重なり、Q は辺 AB 上にある。この時点をと $t = 0$ とする。PQR を頂点 Q を中心として時計回りに、R が辺 AB あるいは右隣の辺 BC 上に来るまで回転させる。この操作が終わった時点をと $t = 1$ とする。次に PQR を R を中心として時計回りに、P が R の乗っている辺あるいはその右隣の辺の上に来るまで回転させる。この操作が終わった時点をと $t = 2$ とする。

以下同様にして、PQR を ABCD の内側に接しながら転がしていく。



- (1) $t = 5$ で正三角形 PQR のいずれかの頂点が A に戻るのは、

$$a = \boxed{\text{マ}} + \boxed{\text{ミ}} \sqrt{\boxed{\text{ム}}} \text{ のときである。このとき、} t = 0 \text{ から}$$

$$t = 5 \text{ までの間に頂点 R の描く軌跡の長さは } \boxed{\text{メ}} \pi \text{ である。}$$

- (2) $t = 6$ で正三角形 PQR のいずれかの頂点が A に戻るのは、

$$a = \boxed{\text{モ}} + \boxed{\text{ヤ}} \sqrt{\boxed{\text{ユ}}} + \boxed{\text{ヨ}} \sqrt{\boxed{\text{ラ}}} \text{ のときである。}$$

$$\text{ただし } \boxed{\text{ユ}} < \boxed{\text{ラ}} \text{ とする。}$$

- (3) $t = 4$ で正三角形 PQR のいずれかの頂点が A に戻るとすると、

$$a^2 + \left(\boxed{\text{リ}} + \boxed{\text{ル}} \sqrt{\boxed{\text{レ}}} \right) a + \boxed{\text{ロ}} = 0$$

が成り立つ。