

(1) 与えられた漸化式より,

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x \{f_1(t)\}^2 dt = 1 + \int_0^x 1^2 dt = 1 + [t]_0^x = 1 + x. \dots\dots(\text{答})$$

$$f_3(x) = 1 + \int_0^x \{f_2(t)\}^2 dt = 1 + \int_0^x (1+t)^2 dt = 1 + \left[t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3. \dots\dots(\text{答})$$

(2) $f_1(x) = 1$ を x で割った余りは $P_1(x) = 1$. $\dots\dots(\text{答})$

$f_2(x) = 1 + x$ を x^2 で割った余りは $P_2(x) = 1 + x$. $\dots\dots(\text{答})$

$f_3(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$ を x^3 で割った余りは $P_3(x) = 1 + x + x^2$. $\dots\dots(\text{答})$

(3) $P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}$ と予想される.

$f_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + x^n Q_n(x)$ ($Q_n(x)$ は整式) であることを帰納法で示す.

[1] $n = 1$ のとき, (2) より確かに成立している.

[2] $n = k$ ($k \geq 1$) のとき成立を仮定して, $n = k + 1$ の場合を証明する. 与えられた漸化式より,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= 1 + \int_0^x \{f_k(t)\}^2 dt = 1 + \int_0^x \{1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^{n-1} + t^n Q_n(t)\}^2 dt \\ &= 1 + \int_0^x \{1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + \dots + nt^{n-1} + t^n R_n(t)\} dt = 1 + [t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + t^{n+1} S_n(t)]_0^x \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1} S_n(x) \end{aligned}$$

を得る. ここで, $R_n(t), S_n(t)$ は t の整式. よって, $n = k + 1$ の場合も成り立つ.

[1], [2] より, すべての自然数 n に対して与式が成り立つ. (証明終わり)

(4) 等比数列の和の公式より, $P_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

$|x| < 1$ なので $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \frac{1}{1 - x}$. $\dots\dots(\text{答})$

解説 微分方程式 $g(0) = 1$ かつ $g'(x) = \{g(x)\}^2$ を 0 から x まで積分して積分方程式にすると,

$g(x) = 1 + \int_0^x \{g(t)\}^2 dt$ になる. これを逐次代入法で解くときの関数漸化式が本問である.

2

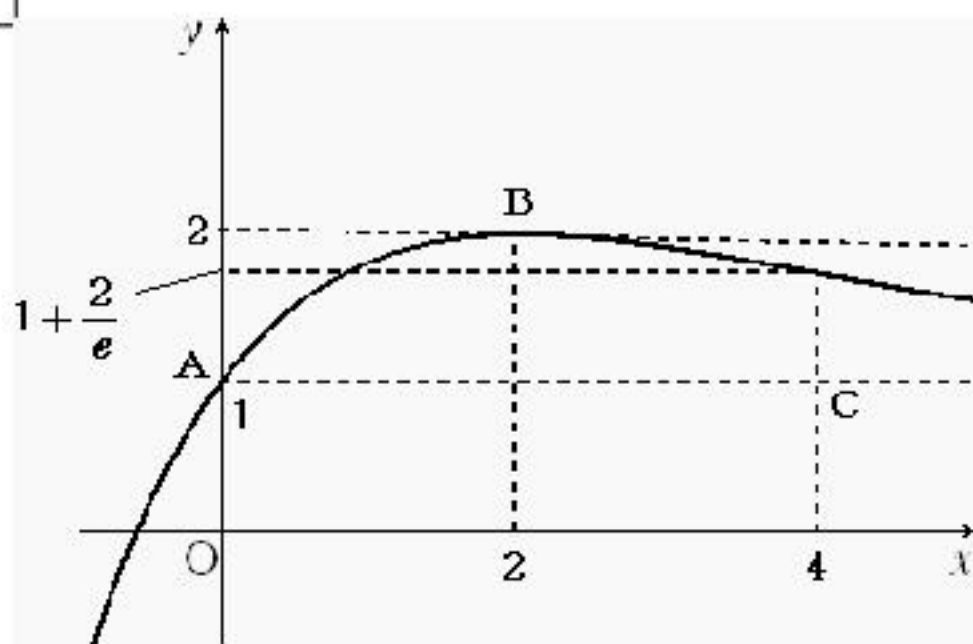
$$(1) \quad f'(x) = \frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}x \left(-\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{4}(2-x)e^{1-\frac{x}{2}}.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}e^{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}(2-x) \left(-\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{8}(x-4)e^{1-\frac{x}{2}}.$$

よって、増減表は以下のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	∞
$f''(x)$		-		-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-		-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$1 + \frac{2}{e}$	$\searrow$	1

グラフは。



(2) $f(0) = 1$ なので、 $y = f(x)$ のグラフ上には点 $A(0, 1)$, $B(2, 2)$ が載っている。

$y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2$) のグラフは上に凸なので、線分 AB より上側にある。

よって、 $\int_0^2 f(x) dx$ は線分 AB と x 軸の間の台形部の面積 3 より大きい。……(i)

$y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2$) は単調増加なので、グラフは $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$ を

頂点とする面積 4 の正方形の内部に収まる。よって、 $\int_0^2 f(x) dx < 4$ 。

この2つの事実より $\left[\int_0^2 f(x) dx \right] = 3$ 。……(答)

(3) $y = f(x)$ のグラフの下側には点 $C(4, 1)$ がある。

$y = f(x)$ ($2 \leq x \leq 4$) のグラフは上に凸なので、線分 BC より上側にある。

よって、 $\int_2^4 f(x) dx$ は線分 BC と x 軸の間の台形部の面積 3 より大きい。(i) と合わせて $\int_0^4 f(x) dx > 6$ 。

一方、 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 3$) のグラフは $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$, $(0, 2)$ を

頂点とする面積 6 の長方形の内部に収まる。よって、 $\int_0^3 f(x) dx < 6$ 。

以上より $[a] = 3$ 。……(答)

3

(1) 与式の解は $y = f(x) = -2x^3 + 6x$ のグラフと x 軸に平行な直線 $y = a$ の交点の x 座標に等しい.

$f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x+1)(x-1)$ なので, 増減表は以下の通り.

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

グラフより $-4 < a < 4$ ……(答)

(2) $g(x) = 2x^3 - 6x + a$ とおく. $0 < a < 4$ のとき, 次の表を得る.

x	-2	$\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$
$g(x)$	$-4 + a < 0$	$a > 0$	$a > 0$	$-4 + a < 0$	$a > 0$

$g(x)$ は連続関数なので, 中間値の定理より,

$-2 < \alpha < -\sqrt{3} < 0 < \beta < 1 < \gamma < \sqrt{3}$ が成り立つ. よって, $|\beta| < |\gamma| < |\alpha|$. ……(答)

(3) $g(-2a) = 2(-2a)^3 - 6(-2a) + a = -16a^3 + 13a = a(-16a^2 + 13)$,

$g(2a) = 2(2a)^3 - 6(2a) + a = 16a^3 - 11a = a(16a^2 - 11)$ である.

(i) $0 < a < \frac{\sqrt{11}}{4}$ のとき.

$0 < 2a < \frac{\sqrt{11}}{2} < \sqrt{3}$ である. また $g(2a) < 0$ となる. よって, (2) の表に対応する表は

x	-2	$-\sqrt{3}$	0	$2a = b$	$\sqrt{3}$
$g(x)$	$-4 + a < 0$	$a > 0$	$a > 0$	$g(2a) < 0$	$4 + a > 0$

となる. このとき, $-2 < \alpha < -\sqrt{3} < 0 < \beta < b < \gamma < \sqrt{3}$ が成り立つ.

(ii) $a = \frac{\sqrt{11}}{4}$ のとき, $2a = \frac{\sqrt{11}}{2}$ は 1 と $\sqrt{3}$ の間の数である. また $g(2a) = 0$ となる.

(2) の表より $-2 < \alpha < -\sqrt{3} < 0 < \beta < 1 < b = \gamma < \sqrt{3}$ が分かる.

(iii) $\frac{\sqrt{11}}{4} < a < \frac{\sqrt{13}}{4}$ のとき.

$1 < \frac{\sqrt{11}}{2} < 2a < \frac{\sqrt{13}}{2} < 2$ である. また $g(-2a) > 0, g(2a) > 0$ となる. よって, (2) の表に対応する表は

x	-2	$-2a = -b$	0	1	$2a = b$
$g(x)$	$-4 + a < 0$	$g(-2a) > 0$	$a > 0$	$-4 + a < 0$	$g(2a) > 0$

となる. このとき, $-2 < \alpha < -b < 0 < \beta < 1 < \gamma < b$ が成り立つ.

(iv) $a = \frac{\sqrt{13}}{4}$ のとき, $-2a = -\frac{\sqrt{13}}{2}$ は -2 と $-\sqrt{3}$ の間の数である. また $g(-2a) = 0$ となる.

(2) の表より $\alpha = -b < -\sqrt{3} < 0 < \beta < \gamma < \sqrt{3}$ が分かる.

(v) $\frac{\sqrt{13}}{4} < a < 4$ のとき.

$2a > \frac{\sqrt{13}}{2} > \sqrt{3}$ である. また $g(-2a) < 0, g(2a) > 0$ となる. よって, (2) の表に対応する表は

x	$-2a = -b$	$-\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$
$g(x)$	$g(-2a) < 0$	$a > 0$	$a > 0$	$-4 + a < 0$	$a > 0$

となる. このとき, $\alpha < -b < -\sqrt{3} < 0 < \beta < 1 < \gamma < \sqrt{3}$ が成り立つ.

(i)~(v) より,

$0 < a < \frac{\sqrt{11}}{4}$ のとき $|\beta| < b < |\gamma| < |\alpha|$. $a = \frac{\sqrt{11}}{4}$ のとき $|\beta| < b = |\gamma| < |\alpha|$.

$\frac{\sqrt{11}}{4} < a < \frac{\sqrt{13}}{4}$ のとき $|\beta| < |\gamma| < b < |\alpha|$. $a = \frac{\sqrt{13}}{4}$ のとき $|\beta| < |\gamma| < b = |\alpha|$.

$\frac{\sqrt{13}}{4} < a < 4$ のとき $|\beta| < |\gamma| < |\alpha| < b$. ……(答)

注 3つの関数 $y = \pm \frac{x}{2}$, $y = a$, $y = -2x^3 + 6x$ のグラフの位置関係からも出せる.

