

1

- (1) ア 1, イ 2, あ (c).
 (2) い (e), ウ 1, エ 2.
 (3) オ 1, カ 4, う (a), キ 1, ク 2, え (d).

解説

(1), (2) 接点の x 座標を t とおくと

$$y = ax^2 \text{ の接線は } y = 2at(x - t) + at^2. \dots\dots(i)$$

$$y = \log x \text{ の接線は } y = \frac{1}{t}(x - t) + \log t. \dots\dots(ii)$$

(i) と (ii) が一致することから,

$$2at = \frac{1}{t} \text{ かつ } at^2 = \log t.$$

$$\text{これを解いて, } t = \sqrt{e}, a = \frac{1}{2e}.$$

$$\text{よって, } a = \frac{1}{2}e^{-1}, \text{ 接点は } (\sqrt{e}, \frac{1}{2}).$$

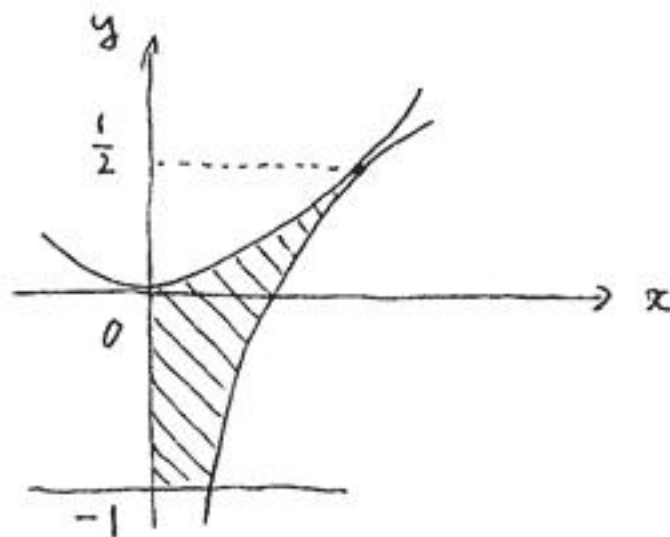
(3) 問題の図形は $x \geq 0$ の部分にある. 境界の曲線を x について解くと,

$$x = \sqrt{2ey} \quad (0 \leq y \leq \frac{1}{2})$$

$$x = e^y \quad (-1 \leq y \leq \frac{1}{2})$$

よって, 求める体積は,

$$V = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi(e^y)^2 dy - \int_0^{\frac{1}{2}} \pi(\sqrt{2ey})^2 dy = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2y} \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} - \pi[ey^2]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}(e - e^{-2}) - \frac{\pi}{4}e = \left(\frac{1}{4}e - \frac{1}{2}e^{-2} \right) \pi.$$



2

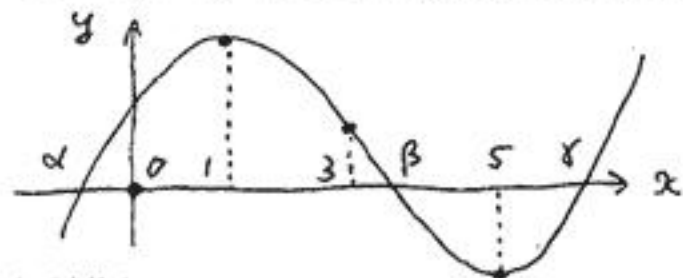
- (1) ケ 1, コ 19, サ 5, シ -13.
 (2) ス 3, セ 3.
 (3) お (a).
 (4) か (b).
 (5) き (c), d 3.

解説

(1),(2) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x-1)(x-5)$, $f''(x) = 6x - 18 = 6(x-3)$ なので, 増減表は以下の通りになる.

x	...	1	...	3	...	5	...
$f''(x)$	-		-	0	+		+
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	↖	19	↘	3	↘	-13	↗

この表から, 極大点 (1, 19), 極小点 (5, -13), 変曲点 (3, 3) であることが分かる.



(3) $f(0) = 12 > 0$ より $0 \in A$.

(4) $f(-1) = -13 < 0$, $f(0) > 0$, $f(3) > 0$, $f(4) = -8 < 0$, $f(6) = -6 < 0$, $f(7) = 19 > 0$ である.

よって, $f(x) = 0$ は $-1 < \alpha < 0 < 3 < \beta < 4 < 6 < \gamma < 7$ を満たす 3 実解 α, β, γ を持つ. ……(i)

A は开区間 $\alpha < x < \beta$ である. $a > 0$ のとき,

A に $B: 0 \leq x \leq a$ が含まれる. $\iff a < \beta$ ……(ii)

なので, a は存在する.

もし a に最大値が存在したとすると, $a < \frac{a+\beta}{2} < \beta$ なので $\frac{a+\beta}{2}$ は条件を満たす a より大きい値となり, a が最大であることに矛盾する. よって, a の最大値は存在しない.

(5) (i),(ii) より $a = 1, 2, 3$ なので, a は存在し, 最大値は 3 である.

3

(1) ソ 3.

(2) (a) タ 3, (b) チ 12, (c) ツ 18.

解説

(1) 白の面が k 枚とする. 白の面の頂点は, 各正方形に 4 頂点があることから, のべ $4k$ 個. 一方, 白の面の頂点は, 立方体の各頂点毎に 2 個以下なので, 立方体の 8 頂点全体でのべ 16 個以下. よって, $4k \leq 16$ より $k \leq 4$ となる. よって, 白の面は 4 枚以下. 同様にして, 黒の面も 4 枚以下なので, 白の面は 2 枚以上.

(i) 白の面が 2 枚のとき, その 2 枚が向かい合う 1 通り.

(ii) 白の面が 3 枚のとき, その 3 枚が一行に並ぶ 1 通り.

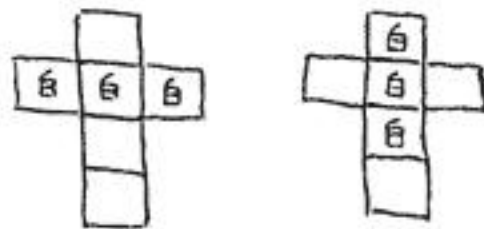
(iii) 白の面が 4 枚のとき, その 4 枚が輪になる (黒の面が向かい合う) 1 通り.

(i),(ii),(iii) より 3 通り.

(2) (a) 向かい合った白の面が, 立方体の上下, 左右, 前後に配置される 3 通り.

(b) 一行に並ぶ 3 枚の白の中央部分の位置の決め方が 6 通り. 列の並ぶ方向が 2 通り. よって, $6 \times 2 = 12$ 通り.

(c) 白の面が 4 枚のときは, 2 枚ある黒の面の配置を考えると (a) と同じく 3 通り. よって, $3 + 12 + 3 = 18$ 通り.



- (1) テ 2, ト 3, ナ 4, ニ 3.
 (2) ヌ 3, ネ 2.
 (3) ノ 3, ハ 2, ク (c).

解説

(1) 与式に $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ を代入して,
 $\cos \phi_1 + \cos \phi_2 = -1 \cdots \cdots (i), \sin \phi_1 + \sin \phi_2 = 0 \cdots \cdots (ii)$ を得る.

(ii) と $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 < 2\pi$ より $\phi_1 + \phi_2 = 2\pi$ かつ $\phi_1 \leq \pi \leq \phi_2$.

$\phi_2 = 2\pi - \phi_1$ を (i) に代入して, $2\cos \phi_1 = -1$ なので, $\phi_1 = \frac{2}{3}\pi$. よって, $\phi_2 = \frac{4}{3}\pi$.

(2) 倍角公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ より $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$.

よって, 与式左辺は

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1 + \cos 2(\theta + \phi_1)}{2} + \frac{1 + \cos 2(\theta + \phi_2)}{2} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \cos 2\theta + \cos \left(2\theta + \frac{4}{3}\pi \right) + \cos \left(2\theta + \frac{8}{3}\pi \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \cos 2\theta + \cos \left(2\theta + \frac{4}{3}\pi \right) + \cos \left(2\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \right\} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

ここで, (1) の結果を, θ を 2θ に置き換えて用いた.

(3) $\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{c} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である.

$\cos(\theta + \phi_2) = \cos\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)$ に注意する.

与式の y 座標は,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-2\sin \theta \sin \frac{2}{3}\pi\right) = -\sqrt{3} \sin \theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \sin \theta = \frac{3}{2} \sin(-\theta).$$

与式の x 座標は,

$$\cos \theta - \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) = \cos \theta - \frac{1}{2}(-\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos \theta = \frac{3}{2} \cos(-\theta).$$

ここで, (1) の結果を, 第 2 項と第 3 項に用いた.

よって, $P = \frac{3}{2} (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$.

θ が増加すると, この点は, 原点中心, 半径 $\frac{3}{2}$ の円周上を時計回り, つまり負の向きに回転する.

