

(1) 合成関数の微分の公式より,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} e^x = e^x \frac{dx}{dt} = e^x \left(1 - \frac{4}{1+e^{-x}} \right) = y \left(1 - \frac{4}{1+y^{-1}} \right) \\ &= y \left(1 - \frac{4y}{y+1} \right) \\ &= -\frac{y(3y-1)}{y+1} \quad \dots\dots(\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \frac{dt}{dy} &= -\frac{y+1}{y(3y-1)} \\ &= \frac{1}{y} - \frac{4}{3y-1}\end{aligned}$$

両辺を y で積分して,

$$t = \log|y| - \frac{4}{3} \log|3y-1| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$t=0$ のとき, $x=0$ なので,

$$y = e^x = e^0 = 1$$

よって,

$$C = \frac{4}{3} \log 2$$

また, $y = e^x > 0$ なので,

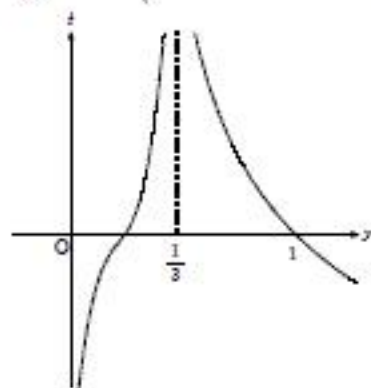
$$t = \log y - \frac{4}{3} \log|3y-1| + \frac{4}{3} \log 2 \quad \left(0 < y \text{ かつ } y \neq \frac{1}{3} \right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3)

y	0	...	$\frac{1}{3}$	...	∞
$\frac{dt}{dy}$		+		-	0
t	$-\infty$	$\nearrow$	∞	$\searrow$	$-\infty$

グラフより,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \frac{1}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$



(4)

$$x = \log y \text{ なので, } \lim_{t \rightarrow \infty} x = \log \frac{1}{3} = -\log 3 \quad \dots\dots(\text{答})$$

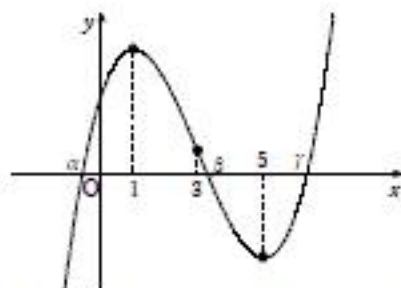
(1)	ア	1	イ	19	ウ	5	エ	-13
(2)	オ	3	カ	3				
(3)	あ	(a)						
(4)	い	(b)						
(5)	う	(c), d	3					

解説

$$(1), (2) \quad f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 \\ = 3(x-1)(x-5),$$

$f''(x) = 6x - 18 = 6(x-3)$ なので, 増減表は以下の通りになる.

x	...	1	...	3	...	5	...
$f'(x)$	-		-	0	+		+
$f''(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	19	$\searrow$	3	$\searrow$	-13	$\nearrow$



この表から, 極大点 $(1, 19)$, 極小点 $(5, -13)$, 変曲点 $(3, 3)$ であることがわかる.

$$(3) \quad f(0) = 12 > 0 \text{ より, } 0 \in A$$

$$(4) \quad f(-1) = -13 < 0, f(0) > 0, f(3) > 0, f(4) = -8 < 0, f(6) = -6 < 0, \\ f(7) = 9 > 0 \text{ である.}$$

よって, $f(x) = 0$ は $-1 < \alpha < 0 < 3 < \beta < 4 < 6 < \gamma < 7$ を満たす 3 実数解 α, β, γ を持つ.(i)

A は開区間 $\alpha < x < \beta, \gamma < x$ である.

$a > 0$ のとき,

$$A \text{ に } B: 0 \leq x \leq a \text{ が含まれる} \iff a < \beta \text{(ii)}$$

なので, a は存在する.

もし a に最大値が存在したとすると, (ii) より, $a < \frac{a+\beta}{2} < \beta$ なので, $\frac{a+\beta}{2}$ は条件を満たす a より大きい値となり, a が最大であることに矛盾する.

よって, a の最大値は存在しない. かつ B に含まれる最大の $x = a$ において, (ii) より a より大きい実数は存在する. よって (b)

$$(5) \quad (i), (ii) \text{ より } a = 1, 2, 3 \text{ なので, } a \text{ は有限個 (3個) 存在し, 最大値は } 3 \text{ である.}$$

(1)	キ	3	
(2)	(a)	ク	3
	(b)	ケ	12
	(c)	コ	18

解説

(1)(i) 白の面が 2 枚のとき

その 2 枚が向かい合う 1 通り.

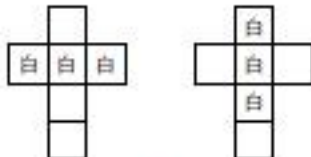
(ii) 白の面が 3 枚のとき

その 3 枚が一行に並ぶ 1 通り.

(iii) 白の面が 4 枚のとき

その 4 枚が輪になる(黒の面が向かい合う) 1 通り.

(i), (ii), (iii) より 3 通り.



(2)

(a) 向かい合った白の面が, 立方体の上下, 左右, 前後に配置される 3 通り.

(b) (a)の組合せに対して, もう一面, 側面の 4 つから選ぶとよいので, $3 \times 4 = 12$ 通り.

(c) 白の面が 4 枚のときは, 2 枚ある黒の面の配置を考えると(a)と同じく

3 通り. よって, $3 + 12 + 3 = 18$ 通り.

(1)	サ	2	シ	3	ス	4	セ	3
(2)	ソ	3	タ	2				
(3)	チ	3	ツ	2	え	(c)		

解説

(1) 与式に $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ を代入して、

$$\cos \phi_1 + \cos \phi_2 = -1 \quad \cdots (i)$$

$$\sin \phi_1 + \sin \phi_2 = 0 \quad \cdots (ii)$$

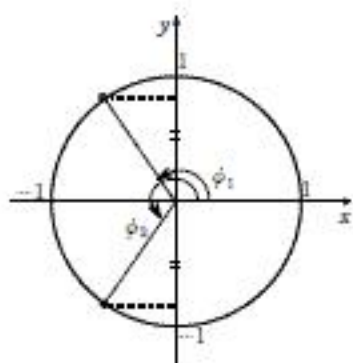
を得る。

(ii) と $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 < 2\pi$ より、

$$\phi_1 \leq \pi \leq \phi_2 \text{ かつ } \phi_1 + \phi_2 = 2\pi$$

 $\phi_2 = 2\pi - \phi_1$ を (i) に代入して、 $2\cos \phi_1 = -1$ なので、

$$\phi_1 = \frac{2}{3}\pi, \phi_2 = \frac{4}{3}\pi$$

(2) 倍角公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ より、 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

よって、与式左辺は

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1 + \cos 2(\theta + \phi_1)}{2} + \frac{1 + \cos 2(\theta + \phi_2)}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \cos 2\theta + \cos \left(2\theta + \frac{4}{3}\pi \right) + \cos \left(2\theta + \frac{8}{3}\pi \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \cos 2\theta + \cos \left(2\theta + \frac{4}{3}\pi \right) + \cos \left(2\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ここで、(1) の結果を、 θ を 2θ に置き換えて用いた。(3) $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{c} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。 $\cos(\theta + \phi_2) = \cos\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right)$ に注意する。与式の y 座標は、

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-2 \sin \theta \sin \frac{2}{3}\pi \right) \\ &= -\sqrt{3} \sin \theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{3}{2} \sin \theta = \frac{3}{2} \sin(-\theta) \end{aligned}$$

与式の x 座標は、

$$\begin{aligned} & \cos \theta - \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) \\ &= \cos \theta - \frac{1}{2} (-\cos \theta) \\ &= \frac{3}{2} \cos \theta = \frac{3}{2} \cos(-\theta) \end{aligned}$$

ここで、(1) の結果を、第 2 項と第 3 項に用いた。

よって、 $P = \frac{3}{2}(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$ θ が増加すると、この点は原点中心、半径 $\frac{3}{2}$ の円周上を時計回り、つまり負の向き回転する。