

(2006年度)

7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は6ページ，4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し，氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはいけない。
6. 筆記具は，HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはいけない。
7. マークをするとき，枠からはみ出したり，枠のなかに白い部分を残したり，文字や番号，枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場することはできない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

ア から ヘ には当てはまる数値を, あ と い には選択肢からもつともふさわしいものを, それぞれマークせよ。ただし, π は円周率とする。

1 (1) xy 平面内の 3 つの集合

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2y - 1 < 0\}$$

$$B = \{(x, y) \mid y + x^2 - 1 \leq 0\}$$

$$C = \{(x, y) \mid y - ax - a = 0\}$$

を考える。 $A \cap B \cap C \neq \phi$ であるのは, 実数 a が

$$\text{ア} < a < \text{イ}$$

を満たすときである。

(2) 方程式

$$\sqrt{x+1} - x - k = 0$$

を満たす解の個数が最も多いのは, 実数 k が

$$\text{ウ} \leq k < \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$$

を満たすときである。

(3) $-1 \leq x \leq 1$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して定積分

$$\int_{-1}^1 \{f(x) - (px + q)\}^2 dx$$

は, $p = \frac{\text{カ}}{\text{キ}} \int_{-1}^1 xf(x)dx$, $q = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \int_{-1}^1 f(x)dx$ のとき最小値をとる。

2

外から空気を入れて、球の形をした風船を膨らます装置がある。それを観測して、その風船の半径が r のとき、表面積が単位時間あたり $64\pi r e^{-r}$ の割合で増加していることをつきとめた。ただし、時刻 $t = 0$ のとき $r = 0$ と仮定する。また対数は自然対数とし、 e は自然対数の底とする。

- (1) $\frac{dr}{dt}$ を r の式で表すと、

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \boxed{\text{あ}}$$

である。時刻 t を風船の半径 r の関数と思えば

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \boxed{\text{い}}$$

である。

$\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$ の選択肢：

(a) r	(b) r^2	(c) r^{-1}	(d) r^{-2}
(e) e^r	(f) e^{-r}	(g) $\log r$	(h) $\frac{1}{\log r}$

- (2) 時刻 t における風船の体積を $V(t)$ とすると

$$\frac{dV(t)}{dt} = \boxed{\text{セ}} \pi \frac{\left(\log(\boxed{\text{ソ}} t + \boxed{\text{タ}}) \right)^2}{\boxed{\text{ソ}} t + \boxed{\text{タ}}}$$

である。

3 $a \geq 0$ とし,

$$f(x) = \{1 + (a + x)^2\}\{1 + (a - x)^2\}$$

とおく。 x が $-a \leq x \leq a$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最小値を $m(a)$ とおく。

(1) $0 \leq a \leq \boxed{\text{チ}}$ のときは $m(a) = \boxed{\text{ツ}}a^4 + \boxed{\text{テ}}a^2 + \boxed{\text{ト}}$ であり, $a \geq \boxed{\text{チ}}$ のときは $m(a) = \boxed{\text{ナ}}a^2 + \boxed{\text{ニ}}$ である。

(2) $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq m(x)\}$ で表される xy 平面の図形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積は $\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\pi$ である。

4 xyz 空間の原点に駒がある。 x または y または z が大きくなる方向に 1 ずつ駒を進める。

(1) 原点から $(2, 2, 2)$ まで進む方法は ノ 通りである。

(2) 原点から $(1, 1, 0)$ を通り $(2, 2, 2)$ まで進む方法は ハ 通りである。

(3) 原点から $(1, 1, 1)$ を通らないで $(2, 2, 2)$ まで進む方法は ヒ 通りである。

(4) サイコロを投げ、1, 2, 3 が出たら x 方向、4, 5 が出たら y 方向、6 が出たら z 方向に 1 ずつ進むとき、6 回投げたとき $(2, 2, 2)$ に進む確率は $\frac{\text{フ}}{\text{ヘ}}$ である。