

(2006年度)

10 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は4ページ, 3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の**右側のみ**ミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
4. 左側のミシン目は切り離してはならない。
5. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
6. 各問題に対する解答は, その問題番号が記された解答用紙に記入すること。足りない場合は, その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には, 何も書いてはいけない。
7. マーク式解答用紙には何も記入しないこと。
8. 解答用紙を, 切り離してはいけない。採点が不可能になる。
9. 筆記具は, **HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはいけない。
10. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
11. 試験時間中に退場することはできない。
12. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
13. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

1

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 1, \\f_n(x) &= 1 + \int_0^x f_{n-1}(t)^2 dt, \quad n = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

によって、関数列 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ を定義する。

(1) $f_2(x), f_3(x)$ を求めよ。

(2) $f_n(x)$ を x^n で割ったときの余りを $P_n(x)$ とおく。 $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ を求めよ。

(3) $P_n(x)$ の一般形を予想し、それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

(4) $|x| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ を求めよ。

2

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}xe^{1-\frac{x}{2}}$$

とする。

- (1) 増減・凹凸を明らかにして，曲線 $y = f(x)$ の概形を描け。

実数 a に対し， a を超えない最大の整数を a の整数部分といい， $[a]$ で表す。以下では， e の値について $[e] = 2$ であることは用いてよいが，それより詳しいことを用いる場合にはその証明も記すこと。

- (2) 実数 $\int_0^2 f(x)dx$ の整数部分 $\left[\int_0^2 f(x)dx \right]$ を求めよ。

- (3) $\int_0^a f(x)dx = 6$ となる正の実数 a の整数部分 $[a]$ を求めよ。

3 a を定数とする。3 次方程式 $2x^3 - 6x + a = 0$ が異なる 3 つの実数解 α, β, γ (ただし, $\alpha < \beta < \gamma$) をもつとする。

(1) 定数 a の範囲を求めよ。

以下では定数 a の値が (1) で求めた範囲にあり, さらに $a > 0$ であるとして答えよ。

(2) $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$ の大小を比較せよ。

(3) $b = 2a$ とおく。 $b, |\alpha|, |\beta|, |\gamma|$ の大小を比較せよ。