

$$\boxed{1} \quad (1) \quad (i) \quad \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$$

すなわち $\alpha^2 = -3\alpha - 4$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha^3 &= -3\alpha^2 - 4\alpha \\ &= -3(-3\alpha - 4) - 4\alpha \\ &= 5\alpha + 12\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}\alpha^3 + 2\beta &= 5\alpha + 12 + 2\beta \\ &= 3\alpha + 2(\alpha + \beta) + 12 \\ &= 3\alpha + 6 \quad (\text{解と係数の関係より } \alpha + \beta = -3)\end{aligned}$$

同様にして, $\beta^3 + 2\alpha = 3\beta + 6$

この2つを解にもつ2次方程式は

$$\begin{aligned}(x - 3\alpha - 6)(x - 3\beta - 6) &= 0 \\ x^2 - (3\alpha + 3\beta + 12)x + 9(\alpha + 2)(\beta + 2) &= 0\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}3\alpha + 3\beta + 12 &= 3(\alpha + \beta) + 12 = 3 \times (-3) + 12 = 3 \\ (\alpha + 2)(\beta + 2) &= \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 \\ &= 4 + 2 \times (-3) + 4 = 2\end{aligned}$$

よって, 求める2次方程式は

$$x^2 - 3x + 18 = 0$$

$$\begin{aligned}(ii) \quad \frac{\alpha + k}{\alpha + 1} + \frac{\beta + k}{\beta + 1} &= \frac{2\alpha\beta + (k+1)(\alpha + \beta) + 2k}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} \\ &= \frac{-k + 5}{2} \\ \frac{\alpha + k}{\alpha + 1} \times \frac{\beta + k}{\beta + 1} &= \frac{\alpha\beta + k(\alpha + \beta) + k^2}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} \\ &= \frac{k^2 - 3k + 4}{2}\end{aligned}$$

よって, この2つを解にもつ2次方程式は

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{k-5}{2}x + \frac{k^2 - 3k + 4}{2} &= 0 \\ \iff 2x^2 + (k-5)x + (k^2 - 3k + 4) &= 0\end{aligned}$$

(2) $A = v$ と $E = \sqrt{2}$ の大小が決まるためには

$0 < v < \sqrt{2}$ と $v > \sqrt{2}$ で場合分けが必要

$0 < v < \sqrt{2}$ ならば, $v = 1$ として

$$A = 1, B = 2, C = \frac{3}{2}, D = \frac{4}{3}, E = \sqrt{2}$$

より, $A < D < E < C < B$ と予想できる.

$$\begin{aligned}(\text{証明}) \quad D - A &= \frac{4}{v + \frac{2}{v}} - v = \frac{2 - v^2}{v + \frac{2}{v}} > 0 \\ E - D &= \sqrt{2} - \frac{4}{v + \frac{2}{v}} = \frac{\sqrt{2}v^2 - 4v + 2\sqrt{2}}{v^2 + 2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(v - \sqrt{2})^2}{v^2 + 2} > 0 \\ C - E &= \frac{1}{2} \left(v + \frac{2}{v} \right) - \sqrt{2} = \frac{v^2 - 2\sqrt{2}v + 2}{2v} \\ &= \frac{(v - \sqrt{2})^2}{2v} > 0 \\ B - C &= \frac{2}{v} - \frac{1}{2} \left(v + \frac{2}{v} \right) = \frac{1}{v} - \frac{v}{2} \\ &= \frac{2 - v^2}{2v} > 0 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

次に, $\sqrt{2} < v$ ならば, $v = 2$ として

$$A = 2, B = 1, C = \frac{3}{2}, D = \frac{4}{3}, E = \sqrt{2}$$

より, $B < D < E < C < A$ と予想できる.

証明は上と同様 ($D < E < C$ は $v > 0$ で常に成り立つ)

[2] (1) C_1 と C_2 を連立して

$$4x^2 - (a-1)^2x + 2a^2 - 10a + 15 = 3x^2 - (a^2 - 9)x - 2a + 5$$

$$x^2 + (2a-10)x + 2a^2 - 8a + 10 = 0$$

C_1 と C_2 が異なる2点で交わるためには, 上の方程式が異なる2解をもてばよいので,

$$D/4 = (a-5)^2 - (2a^2 - 8a + 10) > 0$$

$$\iff -a^2 - 2a + 15 > 0$$

$$\iff (a+5)(a-3) < 0$$

$$\iff -5 < a < 3$$

C_1 を $y = f(x)$, C_2 を $y = g(x)$ とおくと

$$k\{y - f(x)\} + l\{y - g(x)\} = 0$$

は C_1 と C_2 の交点を通る高々2次の方程式である.

$k=3, l=-4$ として,

$$\begin{aligned} 3\{y - 4x^2 + (a-1)^2x - 2a^2 + 10a - 15\} \\ - 4\{y - 3x^2 + (a^2 - 9)x + 2a - 5\} = 0 \end{aligned}$$

$$-y - (a^2 + 6a - 39)x - 6a^2 + 22a - 25 = 0$$

$$y = (-a^2 - 6a + 39)x - 6a^2 + 22a - 25$$

これは, C_1 と C_2 の交点を通る直線を表す.

(2) $a=1$ として, $C_1: y = 4x^2 + 7$

$$C_2: y = 3x^2 + 8x + 3$$

$x=t$ における C_1 の接線は

$$y = 8t(x-t) + 4t^2 + 7$$

$$= 8tx - 4t^2 + 7$$

これが C_2 と接するとき,

$$3x^2 + 8x + 3 = 8tx - 4t^2 + 7$$

$$\iff 3x^2 + 8(1-t)x + 4t^2 - 4 = 0$$

は重解をもつ.

よって

$$D/4 = 16(1-t)^2 - 3(4t^2 - 4) = 0$$

$$4t^2 - 32t + 28 = 0$$

$$t^2 - 8t + 7 = 0$$

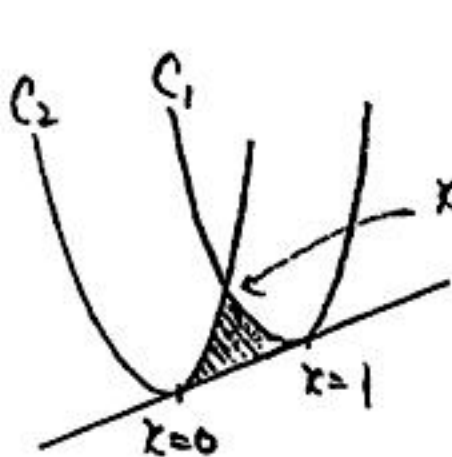
$$(t-1)(t-7) = 0$$

より, $t=1, 7$

したがって, $l_1: y = 8x + 3$

$$l_2: y = 7(8x - 27)$$

求める面積を S とすると



$$S = \int_0^{4-2\sqrt{3}} 3x^2 dx + \int_{4-2\sqrt{3}}^1 4(x-1)^2 dx$$

$$= \left[x^3 \right]_0^{4-2\sqrt{3}} + \left[\frac{4}{3}(x-1)^3 \right]_{4-2\sqrt{3}}^1$$

$$= \alpha^3 - \frac{4}{3}(\alpha-1)^3$$

$$(\alpha = 4 - 2\sqrt{3} \text{ とおく})$$

$$= -\frac{1}{3}\alpha^3 + 4\alpha^2 - 4\alpha + \frac{4}{3}$$

ここで, $\alpha^2 - 8\alpha + 4 = 0$ より $\alpha^2 = 8\alpha - 4$

$$\alpha^3 = 8\alpha^2 - 4\alpha = 8(8\alpha - 4) - 4\alpha = 60\alpha - 32$$

よって

$$S = -\frac{1}{3}(60\alpha - 32) + 4(8\alpha - 4) - 4\alpha + \frac{4}{3}$$

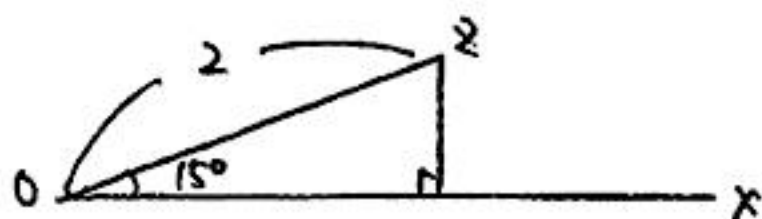
$$= 8\alpha - 4$$

$$= 8(4 - 2\sqrt{3}) - 4$$

$$= 28 - 16\sqrt{3}$$

3 (1) OXとZとの距離は

$$2\sin 15^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$



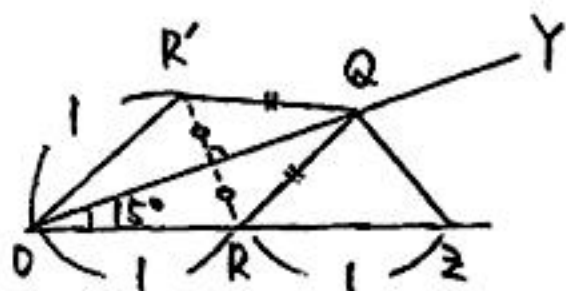
(2)

OYに関してRと対称な点をR'とすると,

$$RQ + QZ = R'Q + QZ$$

より R', Q, Z が一直線上にあるとき左辺は最小
△R'OZで余弦定理より

$$R'Z^2 = 1 + 4 - 4\cos 30^\circ \\ = 5 - 2\sqrt{3} = L^2$$



(3)

OYに関してZと対称な点をZ'とする.

$$RQ + QZ = RQ + QZ'$$

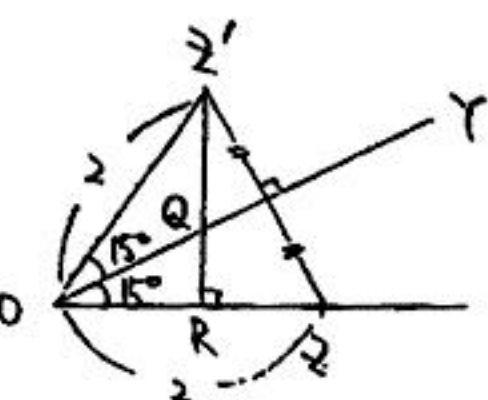
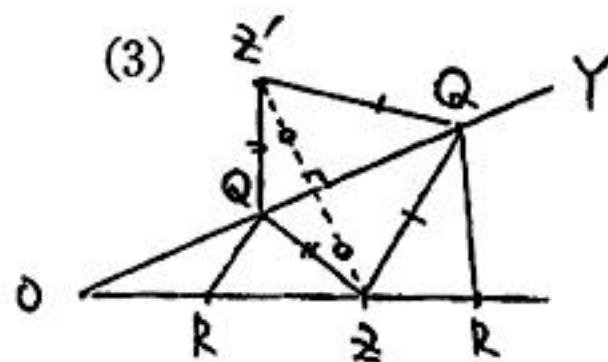
なので, Rを固定したときQが直線Z'R上に
くるときに上式は最小で, 次にRを動かすと,
Z'Rが最小となるのはZ'からOZに垂線を
下ろして, その足をRとしたとき. (左下図)

$$\text{このとき, } OR = 2\cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$OQ = \frac{OR}{\cos 15^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$$

$$Z'R = 2\sin 30^\circ = 1 \text{ より}$$

$$RQ + QZ \text{ の最小値は } 1$$



(4)

OYに関してZと対称な点をZ',

OXに関してZ'と対称な点をZ''とする.

R, Pを固定して, Qを動かすとき, (3)と同様に
考えて, PZ'上にQがあるとき

$$RP + PQ + QZ$$

は最小で, $RP + PZ'$ に等しい.

さらに, $RP + PZ'$ はPがRZ''上にあり,
RZ''が最小のときに最小となる.

$\angle ZOZ'' = 60^\circ$ より, Z''からOZに垂線を

下ろすことができ, このとき, RZ''は最小.

$$OR = 2\cos 60^\circ = 1$$

$$OP = \frac{OR}{\cos 15^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$OQ = \sqrt{2}$$

$$RZ'' = \sqrt{3} \text{ が } RP + PQ + QZ \text{ の最小値}$$

