

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
01	03	02	03	03	03	03	10	03	05	09	05	03

(1) 3つの面積の取り方は二等辺三角形, 直角三角形, 正三角形になる. 面積の小さい順に

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

(2) カードの選び方は全部で ${}_6C_3 = 20$ 通り. そのうち
 $S = S_1$ となるパターンは 6 通りなのでその確率は $\frac{3}{10}$,
 $S = S_3$ となるパターンは 2 通りなのでその確率は $\frac{1}{10}$,
 残る $S = S_2$ となる確率は $\frac{3}{5}$.

以上から S の期待値は

$$\frac{3}{10}S_1 + \frac{3}{5}S_2 + \frac{1}{10}S_3 = \frac{9}{5}\sqrt{3}$$

セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ
05	-10	10	-05	01	01	03	-01	-03	00	02	02	02	01	01

(1)

$$\begin{aligned}
 x^5 - (x-1)^5 &= x^5 - (x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1) \\
 &= 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 x^5 - (x-1)^5 &= 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1 \\
 x^4 - (x-1)^4 &= 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 \\
 x^3 - (x-1)^3 &= 3x^2 - 3x + 1 \\
 x^2 - (x-1)^2 &= 2x - 1
 \end{aligned}$$

より, 高次数の式から割っていくと

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 \cdot (5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1) + 12x^3 - 12x^2 + 9x - 1 \\
 12x^3 - 12x^2 + 9x - 1 &= 3 \cdot (4x^3 - 6x^2 + 4x - 1) - 3x^2 - 3x + 2 \\
 -3x^2 - 3x + 2 &= -1 \cdot (3x^2 - 3x + 1) - 6x + 3 \\
 -6x + 3 &= -3 \cdot (2x - 1) + 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore A = 1, B = 3, C = -1, D = -3, E = 0$$

ここで, 任意の整数 j について

$$\sum_{k=1}^n k^j - (k-1)^j = n^j$$

となるので, $S_n = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + E$ より

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= 10^5 + 3 \cdot 10^4 - 10^3 - 3 \cdot 10^2 = 12870 \\
 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13
 \end{aligned}$$

ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ	ル
03	-02	02	17	-12	02	04	04	04	01	-01	01	-01

(1) 対角線 AC に注目すると

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \sqrt{2} r_1 + r_1 + 1 \\ \therefore r_1 &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(2) 求める円の半径を r とすると, (1) と同様に

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \sqrt{2} r + r + 2r_1 + 1 \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{2} - 1 - 6 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = 17 - 12\sqrt{2}\end{aligned}$$

(3) 問題図中, 2 円 O_1 と O_2 を跨いでいる直角三角形に注目すると

$$EF^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1 r_2$$

次に, O_2 の右下にかかる大きな直角三角形に注目して

$$FB^2 = (1 + r_2)^2 - (1 - r_2)^2 = 4r_2$$

また同様に O_1 の中心から辺 BC に垂線を下ろして考えると

$$EB^2 = (1 + r_1)^2 - (1 - r_1)^2 = 4r_1$$

(4) (3) より

$$\begin{aligned}EF &= EB - FB \\ \therefore \sqrt{r_1} \sqrt{r_2} &= \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}\end{aligned}$$

この関係は円 O_1 と O_2 に限らず一般に O_n と O_{n+1} について成り立つので

$$\begin{aligned}\sqrt{r_n} \sqrt{r_{n+1}} &= \sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} &= \frac{1}{\sqrt{r_n}} + 1 \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{r_n}} &= \frac{1}{\sqrt{r_1}} + n - 1 \\ \therefore \sqrt{r_n} &= \frac{\sqrt{r_1}}{1 + (n - 1)\sqrt{r_1}}\end{aligned}$$