

(1)

$P_n(x)$ が 2^n 次の整式で、その係数が $(-1)^n 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$ であること …… ☆

を、 n に関する帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき、 $P_1(x) = 1 - x^2 = (-1)^1 2^0 x^{2^1} + 1$ なので、確かに☆が成り立つ。

[2] $n=k$ ($k \geq 1$) のとき、☆が成立すると仮定すると、漸化式より

$$P_{k+1}(x) = \left\{ (-1)^k 2^{\frac{(k-1)k}{2}} x^{2^k} + \dots \right\} \\ + x^2 \left\{ (-1)^k 2^{\frac{(k-1)k}{2}} 2^k (1-x^2)^{2^{k-1}} + \dots \right\} + (1-x^2) \left\{ (-1)^k 2^{\frac{(k-1)k}{2}} 2^k (2^k-1) x^{2^k-2} + \dots \right\}$$

これは整式であり、最高次の項は、中央の式の $(1-x^2)^{2^{k-1}}$ を展開して得られる $(-x^2)^{2^{k-1}} = -x^{2^{k+1}-2}$ からできる 2^{k+1} 次の項である。その係数は、

$$(-1)^k 2^{\frac{(k-1)k}{2}} 2^k (-1) = (-1)^{k+1} 2^{\frac{(k-1)k}{2} + k} = (-1)^{k+1} 2^{\frac{(k+1)k}{2}}$$

なので、 $n=k+1$ のときも☆が成立する。

[1], [2] より、任意の自然数 n に対して、☆の成立が証明された。■

(2) 整式 $f(x)$ を構成する単項式のうち、偶数次の項の全体を $g(x)$ 、奇数次の項の全体を $h(x)$ とおくと、 $f(x) = g(x) + h(x)$ とおける。

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

なので、 $f(x) - f(-x) = 2h(x)$ となる。よって、

$$\begin{aligned} f(x) \text{ が偶数次の単項式の和} &\iff h(x) \text{ の部分がいない} \\ &\iff f(x) - f(-x) = 0 \\ &\iff f(x) \text{ が偶関数} \end{aligned}$$

今から、 $P_n(x)$ が偶関数であることを n に関する帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき、 $P_1(x) = 1 - x^2$ なので、 $P_1(x)$ は確かに偶関数である。

[2] $n=k$ ($k \geq 1$) のときを仮定する。つまり、 $P_k(-x) = P_k(x)$ の成立を仮定する。

この両辺を x で微分すると、合成関数の微分の公式より、

$$-P'_k(-x) = P'_k(x)$$

再び両辺を x で微分すると、

$$(-1)^2 P''_k(-x) = P''_k(x)$$

を得る。これを用いて $n=k+1$ の場合を考察する。

与えられた漸化式より、

$$\begin{aligned} P_{k+1}(-x) &= P_k(-x) + (-x)^2 P'_k(1 - (-x)^2) + \{1 - (-x)^2\} P''_k(-x) \\ &= P_k(x) + x^2 P'_k(1 - x^2) + (1 - x^2) P''_k(x) \\ &= P_{k+1}(x) \end{aligned}$$

よって、 $P_{k+1}(x)$ も偶関数である。

[1], [2] より、任意の自然数 n に対して、 $P_n(x)$ が偶関数であることが証明された。■

(3) $P_n(x)$ は偶関数なのである整式 $f_n(t)$ が存在して、 $P_n(x) = f_n(x^2)$ とおける。したがって、

$$\begin{aligned} &P_n(x) \text{ が } (x^2 - 1) \text{ で割り切れる。} \\ \iff &f_n(t) \text{ が } t - 1 \text{ で割り切れる。} \\ \iff &f_n(t) = (t - 1)Q_n(t) \text{ を満たす整式 } Q_n(t) \text{ が存在する。} \\ \iff &P_n(x) = (x^2 - 1)Q_n(x^2) \text{ を満たす整式 } Q_n(x^2) \text{ が存在する。} \end{aligned}$$

このことを n に関する帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき、 $P_1(x) = (x^2 - 1)(-1)$ なので、 $Q_1(x) = -1$ とすればよい。

[2] $n=k$ ($k \geq 1$) のときを仮定する。つまり、 $P_k(x) = (x^2 - 1)Q_k(x^2)$ を満たす整式 $Q_k(x^2)$ が存在することを仮定する。この仮定の下で $n=k+1$ の場合を考える。

$$P'_k(x) = \{(x^2 - 1)Q_k(x^2)\}' = 2xQ_k(x^2) + (x^2 - 1)2xQ'_k(x^2)$$

なので、

$$\begin{aligned} P'_k(1 - x^2) &= 2(1 - x^2)Q_k((1 - x^2)^2) + \{(1 - x^2)^2 - 1\} 2(1 - x^2)Q'_k((1 - x^2)^2) \\ &= (x^2 - 1) \{-2Q_k((1 - x^2)^2) - 2(x^4 - 2x^2)Q'_k((1 - x^2)^2)\} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= P_k(x) + x^2 P'_k(1 - x^2) + (1 - x^2) P''_k(x) \\ &= (x^2 - 1) [Q_k(x^2) + x^2 \{-2Q_k((1 - x^2)^2) - 2(x^4 - 2x^2)Q'_k((1 - x^2)^2)\} - P''_k(x)] \end{aligned}$$

$P''_k(x)$ は偶関数なので $g_n(x^2)$ とおける。

よって、

$$Q_{k+1}(t) = Q_k(t) + t \{-2Q_k((1 - t)^2) - 2(t^2 - 2t)Q'_k((1 - t)^2)\} - g_n(t)$$

とおけばよい。これは、 $n=k+1$ の場合も、

$$P_{k+1}(x) = (x^2 - 1)Q_{k+1}(x^2)$$

とおけることを示している。

[1], [2] より、任意の自然数 n に対して、 $P_n(x)$ が $x^2 - 1$ で割り切れることが示された。■

(1) (i) $(x^3 - 6x^2 + 9x) - kx = 0$ が異なる 3 実解を持つことが必要十分である。
この式を整理すると、

$$\{x^2 - 6x + (9 - k)\}x = 0$$

である。中括弧の中が $x = 0$ を解に持たないことが必要なので、

$$k \neq 9$$

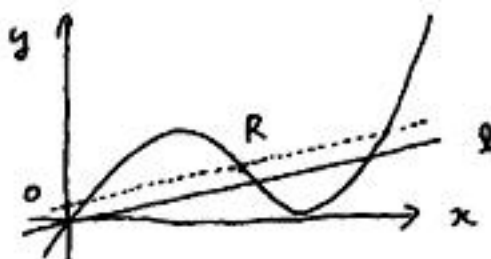
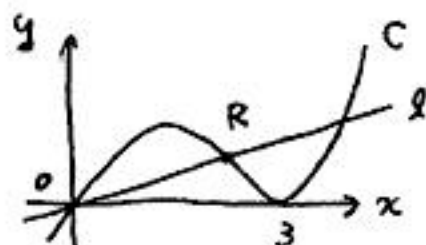
この条件下で、中括弧の中の 2 次方程式が異なる 2 実解を持てばよい。この 2 次方程式の判別式を D とおくと、

$$D/4 = 3^2 - (9 - k) = k > 0$$

よって、

$$0 < k \text{ かつ } k \neq 9 \quad \dots\dots \text{ [答]}$$

(ii) $C: y = x^3 - 6x^2 + 9x$ より $y'' = 6x - 12$ 。よって、 C の変曲点 R は $(2, 2)$ である。
一般に 3 次関数のグラフは、変曲点に関して点対称なので、 $l: y = kx$ が R を通るとき、
つまり、 $k = 1$ のとき面積が等しくなる。



$k \neq 1$ のとき l に平行な R を通る直線 l' を考えると l' は 2 つの図形の面積を等しくするので、 l の場合は等しくならない。

よって、

$$k = 1 \quad \dots\dots \text{ [答]}$$

(2) $C': y = x^3 - ax^2 + bx$ の変曲点 R' は $y'' = 6x - 2a$ より $R' \left(\frac{a}{3}, \frac{-2a^3}{27} + \frac{ab}{3} \right)$ 。

C' と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積が等しいことから、(1)(ii) の考察と同様にして、 x 軸は C' の変曲点 R' を通る。

つまり、

$$\frac{-2a^3}{27} + \frac{ab}{3} = 0$$

よって、

$$b = \frac{2}{9}a^2 \quad \dots\dots \text{ [答]}$$

(1) $P(x, y)$ とおくと,

$$d(P, C) = OP - 1 = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \text{ である.}$$

$$d(P, L) = \min\{|y - 1|, |y - (-1)|\} = \min\{|y - 1|, |y + 1|\}$$

である.

(i) $y < -1$ のとき

$$d(P, C) \leq d(P, L) \iff \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq -(y + 1)$$

$$\iff \sqrt{x^2 + y^2} \leq -y$$

$$\iff x = 0$$

(ii) $-1 \leq y < 0$ のとき

$$d(P, C) \leq d(P, L) \iff \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq y + 1$$

$$\iff \sqrt{x^2 + y^2} \leq y + 2$$

$$\iff \frac{x^2 - 4}{4} \leq y$$

(iii) $0 \leq y < 1$ のとき

$$d(P, C) \leq d(P, L) \iff \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq 1 - y$$

$$\iff \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 - y$$

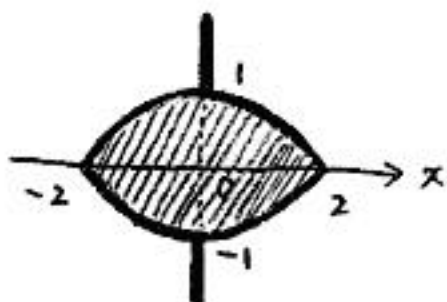
$$\iff \frac{x^2 - 4}{-4} \geq y$$

(iv) $1 \leq y$ のとき

$$d(P, C) \leq d(P, L) \iff \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq y - 1$$

$$\iff \sqrt{x^2 + y^2} \leq y$$

$$\iff x = 0$$



(i), (ii), (iii), (iv) より, M を図示すると, 右のようになる. 【答】

(2) 境界の式 $y = \frac{x^2}{4} - 1$, $y = -\frac{x^2}{4} + 1$ をみると, x 軸対称な図形であることが分かる.
上半分の面積を計算すると,

$$\int_{-2}^2 \left(-\frac{x^2}{4} + 1 \right) dx = 2 \int_0^2 \left(-\frac{x^2}{4} + 1 \right) dx = 2 \left[-\frac{1}{12}x^3 + x \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

よって,

$$\frac{8}{3} \times 2 = \frac{16}{3} \quad \dots\dots \text{【答】}$$