

$|\sin x| \leq 1, |x \sin x| \leq |x|, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ であることを注意する.

- (1) $A > 0$ より, (k).
 (2) $A = 0$ かつ $B = 0$ かつ $C = 0$ より, (j).
 (3) $A = 0$ かつ $C = 0$ より, (i).
 (4) $A = 0$ より, (a).

あ	い	う	え
(k)	(j)	(i)	(a)

(1) 等差数列の和の公式より

$$S(n) = \frac{(1+n^2)n^2}{2}$$

これは n の 4 次多項式で、その最高次の係数は $\frac{1}{2}$.

$$T(3) = 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 9 = \underline{32}$$

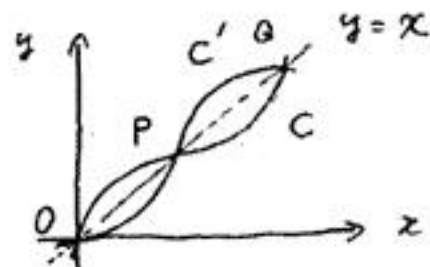
$$\begin{aligned} T(n) &= 1 \times 3 + 4 \times 5 + 9 \times 7 + \cdots + (n-1)^2(2n-1) + n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2(2k+1) + n^2 \\ &= \frac{n^2(n-1)^2}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n^2 \\ &= \frac{n}{6} \{ 3n(n-1)^2 + (n-1)(2n-1) + 6n \} \\ &= \frac{n^4}{6} (3n^3 + \underline{4}n^2 + \underline{6}n + 1) \end{aligned}$$

最高次の係数のみ見ればよいので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n)}{S(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^4}{6} + \cdots}{\frac{n^4}{2} + \cdots} = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1}$$

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
4	1	2	32	1	6	3	-4	6	1	1

$C: y = x + \sin x$ は単調増加で, $C': x = y + \sin y$ とは $y = x$ に関して線対称であることに注意する.



(1) $P(\underline{1}\pi, \underline{1}\pi)$.

(2) C と線分 OP で囲まれた部分の面積の 2 倍なので,

$$2 \int_0^{\pi} \{(x + \sin x) - x\} dx = 2 \times 2 = \underline{4}$$

(3) $Q(\underline{2}\pi, \underline{2}\pi)$.

(4) 回転軸に垂直な平面で切った切り口は半径 y の円なので, その面積は

$$\pi y^2 = \pi(x + \sin x)^2 = \pi(x^2 + 2x \sin x + \sin^2 x)$$

これを積分したものが, 求める体積 V となる.

$$\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^3}{3} \quad \dots\dots (\text{ア})$$

部分積分より

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx = [-x \cos x + \sin x]_0^{2\pi} = -2\pi \quad \dots\dots (\text{イ})$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi \quad \dots\dots (\text{ウ})$$

$$V = \pi((\text{ア}) + 2(\text{イ}) + (\text{ウ})) = \pi \left(\frac{8}{3}\pi^3 - 3\pi \right) = \left(\frac{8}{3}\pi^2 + \underline{-3} \right) \pi^2$$

シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
1	1	4	2	2	8	3	2	-3

(1) 三角関数の合成より, $x = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ となる.

$t = t_1 = \frac{1}{6}\pi$ のとき x は最大値 $x = \underline{2}$ をとる.

y 軸に平行な直線 $x = x_0$ を考える.

$$x_0 = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

の解の個数は最大 2 個となる.

$y = \sin 2t + 1$ となる, x 軸に平行な直線 $y = y_0$ を考える.

$$y_0 = \sin 2t + 1 \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

の解の個数は最大 4 個となる.

(2) x 座標が等しくなるのは, $2\sin\left(t_2 + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(t_3 + \frac{\pi}{3}\right)$ より

$$t_2 + \frac{\pi}{3} = t_3 + \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{または} \quad \left(t_2 + \frac{\pi}{3}\right) + \left(t_3 + \frac{\pi}{3}\right) = \pi + 2n\pi$$

のとき. ここで, n は任意の整数である.

整理すると,

$$t_2 = t_3 + 2n\pi \quad \text{または} \quad t_2 + t_3 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

となる. $0 \leq t_2 < t_3 < 2\pi$ に注意すると, 可能性があるのは,

$$t_2 + t_3 = \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$$

のみである. (ア)

y 座標が等しくなるのは, $\sin 2t_2 + 1 = \sin 2t_3 + 1$ より

$$2t_2 = 2t_3 + 2n\pi \quad \text{または} \quad 2t_2 + 2t_3 = \pi + 2n\pi$$

のとき. 整理すると,

$$t_2 = t_3 + n\pi \quad \text{または} \quad t_2 + t_3 = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

となる. t_2, t_3 の範囲に注意すると, 可能性があるのは,

$$t_2 = t_3 - \pi, \quad t_2 + t_3 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$

のみである. (イ)

(ア), (イ) より

$$t_2 = \frac{2}{3}\pi, \quad t_3 = \frac{5}{3}\pi$$

このとき,

$$(x, y) = \left(0, \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

である.

速度ベクトルは, $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (-\sqrt{3}\sin t + \cos t, 2\cos 2t)$ なので,

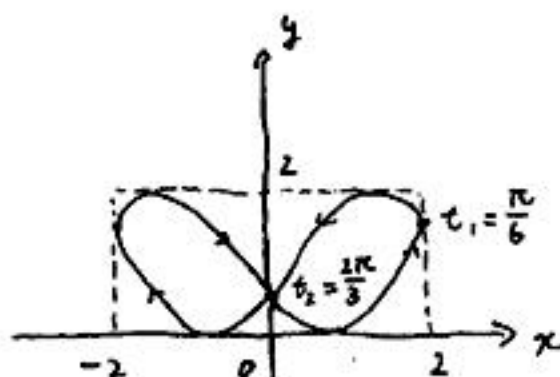
$$t = t_2 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{のとき,} \quad (\underline{-2}, \underline{-1})$$

$$t = t_3 = \frac{5\pi}{3} \quad \text{のとき,} \quad (2, \underline{-1})$$

となる.

(3) $t_1 = \frac{\pi}{6}, t_2 = \frac{2}{3}\pi$ であった. 図を描いて考えると, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 y \, dx \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} (2\cos t \sin t + 1)(-\sqrt{3}\sin t + \cos t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} (2\sqrt{3}\sin^2 t \cos t - 2\cos^2 t \sin t + \sqrt{3}\sin t - \cos t) dt \\ &= \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin^3 t + \frac{2}{3} \cos^3 t - \sqrt{3}\cos t - \sin t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \right) \\ &= \underline{\frac{8}{3}} + \underline{\frac{-1\sqrt{3}}{3}} \end{aligned}$$



ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ
1	6	2	2	4	0	2	2	2	3	5	3

ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ	ル
-2	-1	2	-1	8	3	-1	3	3