1

$(X, Y)=(x+y,\ xy)$とおくと, x, y は t の2次方程式

$$t^2-Xt+Y=0 \cdots\cdots(*)$$

の2解である.

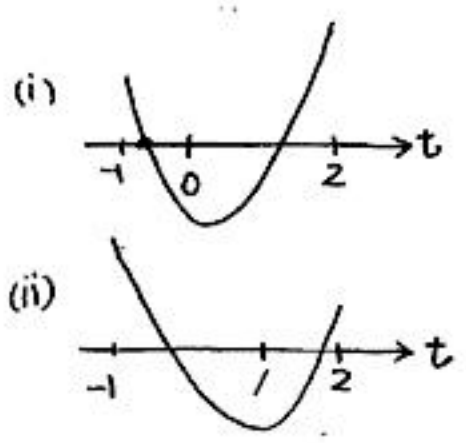
$f(t)=t^2-Xt+Y$ とおく.

$-1 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$ より方程式 $(*)$ の解の配置は次の3通りが考えられる.

(i) 区間 $[-1, 0]$ に1つ, $[0, 2]$ に1つ

(ii) 区間 $[-1, 1]$ に1つ, $[1, 2]$ に1つ

(iii) 区間 $[0, 1]$ に2つ



(i) または (ii)であるための条件は

$f(-1) \geqq 0$ かつ $f(2) \geqq 0$ かつ

$(f(0) \leqq 0$ または $f(1) \leqq 0)$

すなわち

$1+X+Y \geqq 0$ かつ $4-2X+Y \geqq 0$ かつ

$(Y \leqq 0$ または $1-X+Y \leqq 0) \cdots$ ①

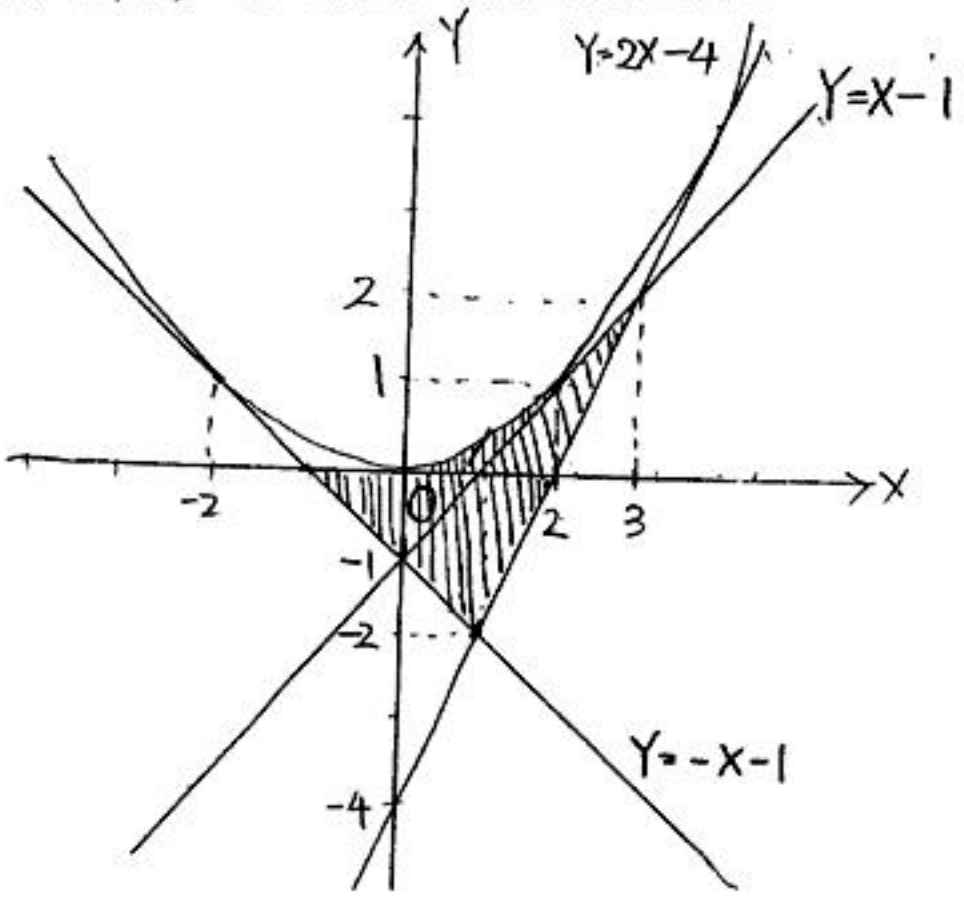
(iii) であるための条件は

$f(0) \geqq 0$ かつ $f(1) \geqq 0$ かつ $0 \leqq \dfrac{X}{2} \leqq 1$ かつ $X^2-4Y \geqq 0$

すなわち

$Y \geqq 0$ かつ $1-X+Y \geqq 0$ かつ $0 \leqq X \leqq 2$ かつ $X^2-4Y \geqq 0 \cdots$ ②

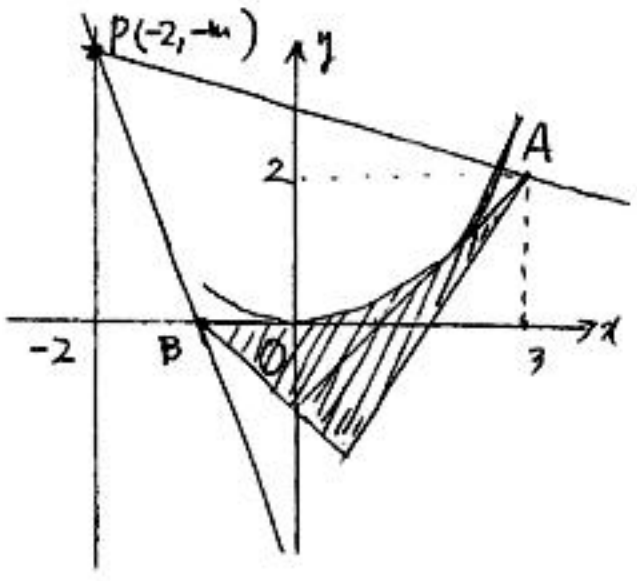
①②より 点 (X, Y) の動く範囲は下図 (境界を含む)



$\dfrac{xy+m}{x+y+2}=\dfrac{Y+m}{X+2}=k$ とおくと $Y+m=k(X+2)$

これは 点 $P(-2, -m)$ を通り傾き k の直線の方程式とみなせる.

この傾き k の最大値を考える.



直線 AP の傾き $\dfrac{2+m}{5}$

直線 BP の傾き m

で $m \leqq \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{2+m}{5} \geqq m$

$m > \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{2+m}{5} < m$

したがって k の最大値は

$m \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $\dfrac{2+m}{5}$, $m > \dfrac{1}{2}$ のとき m …(答)

1

$|\sin x| \leqq 1$, $|x \sin x| \leqq |x|$, $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ であることに注意する.

(1) $A > 0$ より, (k).

(2) $A = 0$ かつ B＝0かつC＝0より, (j).

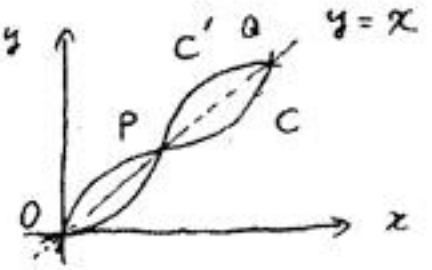
(3) $A = 0$ かつ $C = 0$ より, (i).

(4) $A = 0$ より, (a).

あ	い	う	え
(k)	(i)	(i)	(a)

3

$C : y = x + \sin x$ は単調増加で, $C' : x = y + \sin y$ とは $y = x$ に関して線対称であることに注意する.



(1) $\mathrm{P}(\underline{1}\pi,\ \underline{1}\pi)$.

(2) C と線分 OP で囲まれた部分の面積の 2 倍なので,

$$2\int_0^{\pi} \{(x + \sin x) - x\}\, dx = 2 \times 2 = \underline{4}$$

(3) $\mathrm{Q}(\underline{2}\pi,\ \underline{2}\pi)$.

(4) 回転軸に垂直な平面で切った切り口は半径 y の円なので, その面積は

$$\pi y^2 = \pi(x + \sin x)^2 = \pi(x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x)$$

これを積分したものが, 求める体積 V となる.

$$\int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8\pi^3}{3} \qquad \cdots\cdots \quad (ア)$$

部分積分より

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\, dx = [-x\cos x + \sin x]_0^{2\pi} = -2\pi \qquad \cdots\cdots \quad (イ)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi \qquad \cdots\cdots \quad (ウ)$$

$$V = \pi((ア) + 2(イ) + (ウ)) = \pi\left(\frac{8}{3}\pi^3 - 3\pi\right) = \left(\frac{\underline{8}}{\underline{3}}\pi^2 + \underline{-3}\right)\pi^2$$

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
1	1	4	2	2	8	3	2	−3

4

(1)　三角関数の合成より，$x = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ となる．

$t = t_1 = \underline{\frac{1}{6}}\pi$ のとき x は最大値 $x = \underline{2}$ をとる．

y 軸に平行な直線 $x = x_0$ を考える．

$$x_0 = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (0 \leqq t < 2\pi)$$

の解の個数は最大 $\underline{2}$ 個となる．

$y = \sin 2t + 1$ となる，x 軸に平行な直線 $y = y_0$ を考える．

$$y_0 = \sin 2t + 1 \quad (0 \leqq t < 2\pi)$$

の解の個数は最大 $\underline{4}$ 個となる．

(2)　x 座標が等しくなるのは，$2\sin\left(t_2 + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(t_3 + \frac{\pi}{3}\right)$ より

$$t_2 + \frac{\pi}{3} = t_3 + \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{または} \quad \left(t_2 + \frac{\pi}{3}\right) + \left(t_3 + \frac{\pi}{3}\right) = \pi + 2n\pi$$

のとき．ここで，n は任意の整数である．

整理すると，

$$t_2 = t_3 + 2n\pi \quad \text{または} \quad t_2 + t_3 = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

となる．$0 \leqq t_2 < t_3 < 2\pi$ に注意すると，可能性があるのは，

$$t_2 + t_3 = \frac{\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3}$$

のみである．　…… (ア)

y 座標が等しくなるのは，$\sin 2t_2 + 1 = \sin 2t_3 + 1$ より

$$2t_2 = 2t_3 + 2n\pi \quad \text{または} \quad 2t_2 + 2t_3 = \pi + 2n\pi$$

のとき．整理すると，

$$t_2 = t_3 + n\pi \quad \text{または} \quad t_2 + t_3 = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

となる．t_2，t_3 の範囲に注意すると，可能性があるのは，

$$t_2 = t_3 - \pi,\ \ t_2 + t_3 = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2}$$

のみである．　…… (イ)

(ア)，(イ) より

$$t_2 = \underline{\frac{2}{3}}\pi,\ \ t_3 = \underline{\frac{5}{3}}\pi$$

このとき，

$$(x,\ y) = \left(\underline{0},\ \underline{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}\right)$$

である．

速度ベクトルは，$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = (-\sqrt{3}\sin t + \cos t,\ 2\cos 2t)$ なので，

$t = t_2 = \frac{2\pi}{3}$ のとき，　$(\underline{-2},\ \underline{-1})$

$t = t_3 = \frac{5\pi}{3}$ のとき，　$(\underline{2},\ \underline{-1})$

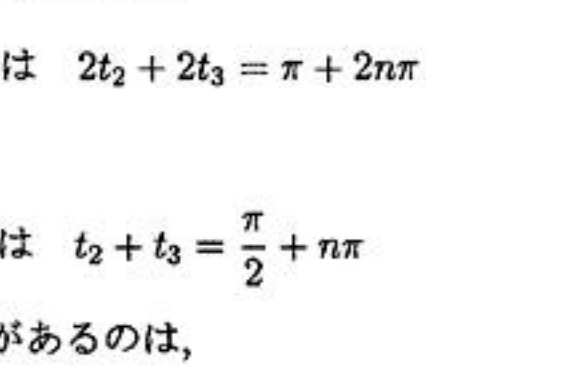
となる．

(3)　$t_1 = \frac{\pi}{6}$，$t_2 = \frac{2}{3}\pi$ であった．図を描いて考えると，求める面積 S は，

$$S = \int_0^2 y\,dx$$

$$= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt$$



$$= -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} (2\cos t\sin t + 1)(-\sqrt{3}\sin t + \cos t)dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} (2\sqrt{3}\sin^2 t\cos t - 2\cos^2 t\sin t + \sqrt{3}\sin t - \cos t)\,dt$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^3 t + \frac{2}{3}\cos^3 t - \sqrt{3}\cos t - \sin t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\right)$$

$$= \underline{\frac{8}{3}} + \underline{\frac{-1\sqrt{3}}{3}}$$

コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
1	6	2	2	4	0	2	2	2	3	5	3

ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ
−2	−1	2	−1	8	3	−1	3	3