

(2007年度)

5 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は7ページ，3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し，氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は，HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき，枠からはみ出したり，枠のなかに白い部分を残したり，文字や番号，枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0 または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	

〔解答表示例〕

－ $\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

－ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

以 下 余 白

次頁へ続く

- 1** 1辺の長さが2の正六角形の頂点を, $P_1, P_2, \dots, P_6$ とする。一方, 1から6までの数字が書かれたカードを1枚ずつ, 合わせて6枚用意し, そこから3枚を無作為に選ぶ。選んだ3枚のカードに書いてある数字を i, j, k とするとき, $\triangle P_i P_j P_k$ をつくる。

(1) $\triangle P_i P_j P_k$ の面積 S は,

$$S_1 = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}, S_2 = \boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}}, S_3 = \boxed{\text{オ}} \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

の3つの値をとりうる。ただし, $S_1 < S_2 < S_3$ とする。

(2) $S = S_1$ となる確率は, $\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり, $S = S_2$ となる確率は, $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

である。これより, 面積 S の期待値は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ となる。

2 (1) $x^5 - (x-1)^5 = \boxed{\text{セ}} x^4 + \boxed{\text{ソ}} x^3 + \boxed{\text{タ}} x^2 + \boxed{\text{チ}} x + \boxed{\text{ツ}}$

である。

(2) 4次式 $f(x) = 5x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x$ に対して、和

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。定数 A, B, C, D, E を

$$f(x) = A\{x^5 - (x-1)^5\} + B\{x^4 - (x-1)^4\} + C\{x^3 - (x-1)^3\} \\ + D\{x^2 - (x-1)^2\} + E$$

を満たすように定めると、

$$A = \boxed{\text{テ}}, B = \boxed{\text{ト}}, C = \boxed{\text{ナ}}, D = \boxed{\text{ニ}}, E = \boxed{\text{ヌ}}$$

となる。これを用いて S_n を計算することができる。たとえば、 S_{10} を

$$S_{10} = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 11^d \times 13^e \\ (a, b, c, d, e \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

と素因数分解して表示すると

$$a = \boxed{\text{ネ}}, b = \boxed{\text{ノ}}, c = \boxed{\text{ハ}}, d = \boxed{\text{ヒ}}, e = \boxed{\text{フ}}$$

となる。

- 3** 図のように、1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の中に、点 C を中心とする半径 1 の四分円 O_0 がある。

(1) 四分円 O_0 と辺 AB, AD とに接する円 O_1 の半径を r_1 とすると、

$$r_1 = \boxed{\text{ヘ}} + \boxed{\text{ホ}} \sqrt{\boxed{\text{マ}}}$$

である。

(2) 円 O_1 と辺 AB, AD とに接する円の半径は、

$$\boxed{\text{ミ}} + \boxed{\text{ム}} \sqrt{\boxed{\text{メ}}}$$

である。

(3) 円 O_1 と四分円 O_0 、辺 AB に接する円 O_2 の半径を r_2 とする。円 O_1 と辺 AB との接点を E、円 O_2 と辺 AB との接点を F とするとき、

$$EF^2 = \boxed{\text{モ}} r_1 r_2, \quad FB^2 = \boxed{\text{ヤ}} r_2, \quad EB^2 = \boxed{\text{ユ}} r_1$$

となる。

(4) 一般に四分円 O_0 と辺 AB に接する円 O_n の半径を r_n とし、四分円 O_0 、円 O_n と辺 AB に接する円 O_{n+1} の半径を r_{n+1} とする。このとき、次の関係式が成立する。

$$\sqrt{r_n} \sqrt{r_{n+1}} = \boxed{\text{ヨ}} \sqrt{r_n} + \boxed{\text{ラ}} \sqrt{r_{n+1}}$$

この式の両辺を $\sqrt{r_n} \sqrt{r_{n+1}}$ で割れば、 $\frac{1}{\sqrt{r_n}}$ に関する漸化式が得られる。 $\sqrt{r_n}$ は

$$\sqrt{r_n} = \frac{\boxed{\text{リ}} \sqrt{r_1}}{1 + (n + \boxed{\text{ル}}) \sqrt{r_1}}$$

である。

