

(2007年度)

7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ, 4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき, 枠からはみ出したり, 枠のなかに白い部分を残したり, 文字や番号, 枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は, 消しゴムでいねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0 または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

☐ あ から ☐ き には選択肢から最もふさわしいものを, ☐ ア から
☐ ホ には当てはまる数値をそれぞれマークせよ。ただし, e は自然対数の底であり, π は円周率とする。

1 次の条件 P, Q について選択肢から答えよ。

(1) $f(x)$ は連続な 2 次導関数をもつとする。

$P: f(a)$ は極値である

$Q: f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$

に対し P は Q の ☐ あ ☐ 。

同じ P と

$Q: f'(a) = f''(a) = 0$

に対し P は Q の ☐ い ☐ 。

(2) $P: y \leq x + 2$ かつ $y > -\frac{2}{3}x + 2$

$Q: y \leq x + 3$ かつ $y > -2x + 2$

に対し P は Q の ☐ う ☐ 。

(3) A, B, O は 2 次正方形行列で O は零行列とする。

$P: A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき $ad - bc \neq 0$

$Q: AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ となる B が存在する

に対し P は Q の ☐ え ☐ 。

同じ P と

$Q: AB = O$ かつ $B \neq O$ となる B が存在する

に対し P は Q の ☐ お ☐ 。

(4) $P: x+y+z=-1$ かつ $xy+yz+zx=-1$ かつ $xyz=1$

$Q: x+y+z=-1$ かつ $x^2+y^2+z^2=3$ かつ $x^3+y^3+z^3=-1$
とする。このとき P は Q の か。

あ から か の選択肢

(a) 必要条件であるが十分条件ではない

(b) 十分条件であるが必要条件ではない

(c) 必要十分条件である

(d) 必要条件でなく十分条件でもない

2

ある放射性元素の時刻 $t = 0$ における量を x_0 とすると t 日後にはその量 $x(t)$ は

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{t_0}}$$

で与えられる。ここで t_0 はある定まった時間を表す正の定数である。ただし、時刻と時間を表す実数の単位はすべて日とする。以下の計算では近似値 $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} e = 0.434$ を用いる。

- (1) この元素は、ちょうど 77 日後にもとの量の $\frac{1}{2}$ になる。このとき t_0 に最も近い整数は である。
- (2) この元素は 365 日後にもとの量の 10^{-a} 倍になる。指数 a の小数第 3 位を 4 捨 5 入して小数第 2 位まで求めると a の整数部分は , 小数第 1 位は , 小数第 2 位は である。
- (3) この元素がもとの量の 10^{-24} 倍になるのを b 日後とすると、 b の整数部分は 桁であり、 b の整数部分の最高位の数字は である。
- (4) 時刻 s から d 日後の元素の量 $x(s+d)$ は $x(s+d) = \frac{x(s)}{2}$ をみたすとする。このような d は s に対したただ 1 つ定まる。 d を s の関数と考え $d = f(s)$ とおけば、 $f(s)$ は 。

の選択肢

- (a) 任意の区間で定数である

(b) 任意の区間で増加する

(c) 任意の区間で減少する

(d) ある区間で増加し、別のある区間で減少する

- 3 xyz 空間において、平面 $z = 0$ 上の円 S_0 と平面 $z = 1$ 上の円 S_1 を次のように定義する。

$$S_0 : x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$

$$S_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1$$

S_0 上の点 $P_0(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ と S_1 上の点 $P_1(\cos \beta, \sin \beta, 1)$ とを考える。 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 0, 1)$ を定点とする。

- (1) $\beta - \alpha = \frac{\pi}{4}$ のとき、平面 $z = t$ (ただし $0 < t < 1$) と四面体 OP_0P_1A とが交わってできる四辺形の面積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}} \left(\boxed{\text{ケ}} t^2 + t \right)$$

である。

- (2) $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき、 z 軸上の点 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ と、平面 $z = \frac{1}{2}$ と線分

$$P_0P_1 \text{ の交点との距離は } \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}} \text{ である。}$$

- (3) 一般に $\beta - \alpha = \theta$ (ただし $0 < \theta < \pi$) のとき、 z 軸上の点 $(0, 0, t)$ (ただし $0 \leq t \leq 1$) と、平面 $z = t$ と線分 P_0P_1 の交点との距離を $l(t)$ とすると

$$\{l(t)\}^2 = \boxed{\text{ス}} t^2 + \boxed{\text{セ}} t + \boxed{\text{ソ}} + \left(\boxed{\text{タ}} t^2 + \boxed{\text{チ}} t \right) \cos \theta$$

である。

- (4) $\beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}$ を保ちながら、 P_0 が S_0 上を、 P_1 が S_1 上を一周したときに、線分 P_0P_1 が動いてできる曲面と、平面 $z = 0$ および

$$z = 1 \text{ によって囲まれる部分の体積は } \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \pi \text{ である。}$$

4 xy 平面の双曲線

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = -1$$

を C とする。点

$$P\left(A \tan \theta, \frac{B}{\cos \theta}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

はつねに C 上を動くとする。ただし、 A, B は定数である。さらに、

$$\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} A \tan \theta = \infty \quad \text{かつ} \quad \lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \frac{B}{\cos \theta} = \infty$$

とする。

(1) このとき $A = \boxed{\text{ト}}$, $B = \boxed{\text{ナ}}$ である。

(2) P から直線 $y = \frac{1}{5}x$ に下ろした垂線 PQ の Q を垂線の足という。
標は

$$\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \tan \theta + \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \frac{1}{\cos \theta}$$

である。線分 PQ の長さを $d(\theta)$ とする。

(3) 上に定義した関数 $d(\theta)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ は $\theta = \alpha$ のとき最小値をとる。このとき

$$\sin \alpha = \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}, \quad d(\alpha) = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}} \sqrt{\boxed{\text{ホ}}}$$