

(2007年度)

10 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は4ページ, 3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の**右側のみ**ミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
4. 左側のミシン目は切り離してはならない。
5. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
6. 各問題に対する解答は, その問題番号が記された解答用紙に記入すること。足りない場合は, その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には, 何も書いてはならない。
7. マーク式解答用紙には何も記入してはならない。
8. 筆記具は, **HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
9. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったり, 切り離してはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

1 関数の列 $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$ を

$$P_1(x) = 1 - x^2,$$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^2 P'_n(1 - x^2) + (1 - x^2) P''_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める。ただし、 $P'_n(1 - x^2)$ は $P_n(x)$ の導関数 $P'_n(x)$ と $1 - x^2$ の合成関数を表し、 $P''_n(x)$ は $P_n(x)$ の第2次導関数を表す。

- (1) $P_n(x)$ は x の整式であることを示し、整理された $P_n(x)$ において最大の次数をもつ項を求めよ。
- (2) 整式 $P_n(x)$ は偶数次の単項式の和になることを示せ。
- (3) 整式 $P_n(x)$ は $x^2 - 1$ で割り切れることを示せ。

2(1) xy 平面上で、曲線

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

を C とし、直線

$$y = kx \quad (\text{ただし, } k \text{ は定数})$$

を ℓ とする。

- (i) C と ℓ が異なる 3 点で交わるための必要十分条件を k の条件で表せ。
 - (ii) k が (i) の条件を満たすとき、 C と ℓ によって囲まれる 2 つの図形の面積が等しくなるような k の値を求めよ。
- (2) a, b を正の定数とする。 $x^3 - ax^2 + bx = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつとし、その最大のものを c とする。

$$\int_0^c (x^3 - ax^2 + bx) dx = 0$$

が成り立つとき、 b を a の式で表せ。

3

xy 平面の原点を中心とする円 $x^2 + y^2 = 1$ を C とし, x 軸に平行な 2 つの直線 $y = 1$ と $y = -1$ の和集合を L とする。

P を xy 平面上の点とする。点 A が円 C 上を動くとき, 線分 PA の長さの最小値を P と C との距離といい, $d(P, C)$ で表す。特に $P \in C$ であれば $d(P, C) = 0$ である。同様に, 点 B が和集合 L 上を動くとき, 線分 PB の長さの最小値を P と L との距離といい, $d(P, L)$ で表す。

$d(P, C) \leq d(P, L)$ を満たすような点 P の全体の集合を M で表す。

- (1) M を xy 平面上に図示せよ。
- (2) xy 平面上で, $|y| \leq 1$ の表す集合と集合 M との共通部分の面積を求めよ。