

(2007年度)

8 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は6ページ，4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで，問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に，監督から指示があったら，解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し，氏名を記入すること。次に，解答用紙の右側のミシン目にそって，きれいに折り曲げてから，受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し，机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら，この問題冊子が，上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで，そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は，HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能，計算機能，辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき，枠からはみ出したり，枠のなかに白い部分を残したり，文字や番号，枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は，消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり，破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子，計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

☐あ から ☐え には選択肢から最もふさわしいものを, ☐ア から ☐ル には当てはまる数値をマークせよ。ただし, e は自然対数の底, π は円周率とする。

1 A, B, C を定数とし, x の関数

$$f(x) = Ae^x + B \sin x + Cx \sin x$$

を考える。

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であるための必要十分条件は ☐あ である。
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ が存在して有限の値であるための必要十分条件は ☐い である。
- (3) すべての x に対して $|f(x)| \leq M$ であるような, x によらない定数 M が存在するための必要十分条件は ☐う である。
- (4) $f(a) = 0$ を満たすいくらでも大きな a が存在するための必要十分条件は ☐え である。

☐あ から ☐え の選択肢

- | | |
|-----------------|-----------------------------------|
| (a) $A = 0$ | (h) $B = C = 0$ |
| (b) $B = 0$ | (i) $C = A = 0$ |
| (c) $C = 0$ | (j) $A = B = C = 0$ |
| (d) $A \neq 0$ | (k) $A > 0$ |
| (e) $B \neq 0$ | (l) $A > 0$ かつ $C > 0$ |
| (f) $C \neq 0$ | (m) $A > 0$ かつ $C > 0$ かつ $B = 0$ |
| (g) $A = B = 0$ | (n) $A \neq 0$ または $C \neq 0$ |

2

任意の実数 x に対して, x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。 n を自然数として

$$S(n) = 1 + 2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n^2} k$$

および

$$T(n) = [\sqrt{1}]^2 + [\sqrt{2}]^2 + \cdots + [\sqrt{n^2}]^2 = \sum_{k=1}^{n^2} [\sqrt{k}]^2$$

を考える。

$S(n)$ は n に関する ア 次多項式でその最高次の係数は $\frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$

である。

一方, $T(1) = 1, T(2) = 7, T(3) = \text{エ}$ であり, 一般に

$$T(n) = \frac{n \text{オ}}{\text{カ}} \left(\text{キ} n^3 + \text{ク} n^2 + \text{ケ} n + 1 \right)$$

が成り立つ。従って,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n)}{S(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{1}]^2 + [\sqrt{2}]^2 + \cdots + [\sqrt{n^2}]^2}{1 + 2 + \cdots + n^2} = \frac{\text{コ}}{\text{サ}}$$

となる。

3

曲線 $y = x + \sin x$ と曲線 $x = y + \sin y$ の第 1 象限の部分を考える。

- (1) 第 1 象限にあるこの 2 曲線の交点のうち原点 O に最も近い交点 P の座標は $(\boxed{\text{シ}} \pi, \boxed{\text{ス}} \pi)$ である。
- (2) この 2 曲線の O, P の間にある部分で囲まれる図形の面積は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 第 1 象限にあるこの 2 曲線の交点のうち原点 O に 2 番目に近い交点 Q の座標は $(\boxed{\text{ソ}} \pi, \boxed{\text{タ}} \pi)$ である。
- (4) 曲線 $y = x + \sin x$, x 軸および点 Q から x 軸に下ろした垂線で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積は

$$\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \pi \boxed{\text{テ}} + \boxed{\text{ト}} \right) \pi^2$$

である。

- 4 座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ の時刻 t ($0 \leq t < 2\pi$) における座標が

$$x = \sqrt{3} \cos t + \sin t$$

$$y = 2 \cos t \sin t + 1$$

であるとき, 点 P のえがく曲線を C とする。

- (1) P が C 上を動くとき $t_1 = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \pi$ で x は最大値 $\boxed{\text{ヌ}}$ をと

る。曲線 C と y 軸に平行な直線との共有点の個数の最大値は $\boxed{\text{ネ}}$ であり, C と x 軸に平行な直線との共有点の個数の最大値は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

- (2) P が C 上を動くとき, 点 $\left(\boxed{\text{ハ}}, \frac{\boxed{\text{ヒ}} - \sqrt{3}}{\boxed{\text{フ}}} \right)$ を異なる時

刻 $t_2 = \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}} \pi$ と $t_3 = \frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}} \pi$ (ただし $t_2 < t_3$) で通過す

る。 $t = t_2$ のとき速度は $(\boxed{\text{ム}}, \boxed{\text{メ}})$, $t = t_3$ のとき速度は $(\boxed{\text{モ}}, \boxed{\text{ヤ}})$ である。

- (3) 時刻 t において P から x 軸に下ろした垂線を PH とする。 t が $t_1 \leq t \leq t_2$ の範囲を動くとき, 線分 PH が動いて作る図形の面

積は $\frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}} + \frac{\boxed{\text{ラ}} \sqrt{\boxed{\text{リ}}}}{\boxed{\text{ル}}}$ である。