

1

(1)	ア	イ	ウ	エ
	-14	9	28	9

(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	-1	-1	2	1	-1	-1	1

	シ	ス	セ
	-2	0	1

(1)

$$\alpha_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$\alpha_1^2 = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 7 - 2\sqrt{10}$$

$$\alpha_1^4 = (\alpha_1^2)^2 = (7 - 2\sqrt{10})^2 = 89 - 28\sqrt{10}$$

α_1 が 4 次方程式 $x^4 + px^2 + q = 0$ の解のひとつであるから

$$\alpha_1^4 + p\alpha_1^2 + q = 0$$

$$\Leftrightarrow (89 - 28\sqrt{10}) + p(7 - 2\sqrt{10}) + q = 0$$

$$\Leftrightarrow (7p + q + 89) - 2(p + 14)\sqrt{10} = 0$$

p, q は整数であるから、 $7p + q + 89, 2(p + 14)$ も整数である。

$p + 14 \neq 0$ と仮定すると

$$\sqrt{10} = \frac{7p + q + 89}{2(p + 14)}$$

となり右辺が有理数となって、 $\sqrt{10}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって

$$p + 14 = 0, 7p + q + 89 = 0$$

$$\therefore p = -14, q = 9$$

であり、確かに整数になっている。また

$$x^4 + px^2 + q = 0 \text{ かつ } x^2 = X$$

$$\Leftrightarrow X^2 + pX + q = 0 \text{ かつ } x^2 = X$$

である。 X の 2 次方程式 $X^2 + pX + q = 0$ の 2 つの解を a, b とする。

$$\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2} + \frac{1}{\alpha_4^2}$$

は $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ の対称式であるから、この式の値は $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ の決め方によらないので

$$x^2 = a \text{ の解が } \alpha_1, \alpha_2$$

$$x^2 = b \text{ の解が } \alpha_3, \alpha_4$$

とでき、2 次方程式の解と係数の関係より

$$a + b = -p = 14, ab = q = 9$$

となる。したがって

$$\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2} + \frac{1}{\alpha_4^2}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{a + b}{ab}$$

$$= 2 \cdot \frac{14}{9}$$

$$= \frac{28}{9}$$

である。

(2) a, b を実数として、 x の多項式 A, B を

$$A = x^4 + ax^2 + b$$

$$B = x^2 + ax + b$$

とおく。実際に A を B で割ると

$$A = \{x^2 - ax + (a^2 + a - b)\} B + a(-a^2 - a + 2b)x + b(b - a^2 - a + 1)$$

となるので、余りが $cx + d$ であり、多項式の割り算の余りは一通りであるから

$$c = a(-a^2 - a + 2b)$$

$$d = b(b - a^2 - a + 1)$$

である。 A が B で割り切れるとき、 $c = d = 0$ である。

$b \neq 0$ とすると、 $d = 0$ より

$$b = a^2 + a - 1$$

これを $c = 0$ の式に代入すると、

$$c = 0$$

$$\Leftrightarrow a(-a^2 - a + 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a^2 + a - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a + 2)(a - 1) = 0$$

$$\therefore (a, b) = (-2, 1), (0, -1), (1, 1)$$

どの場合も $b \neq 0$ であるから a は -2, 0, 1 のいずれかである。

(1)

ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
1	0	2	2	2	2	4

(2)

ニ	ヌ	ネ	ノ
4	0	3	0

(3)

ハ	ヒ
-1	4

- (1) l : 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2) (a > 0)$ と原点 O を結ぶ直線
 k : 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 A における C の接線
 であるから、方程式はそれぞれ

$$l: y = ax$$

$$k: y = 2ax - a^2$$

である。傾きの積は $2a^2 \neq -1$ であるから、2 直線は垂直ではない。
 直線 l, k が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ ϕ_l, ϕ_k とおくと

$$a = \tan \phi_l$$

$$2a = \tan \phi_k$$

よって、直線 l と k のなす角を $\theta (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$ とすると

$$\begin{aligned} \tan \theta &= |\tan(\phi_l - \phi_k)| \\ &= \left| \frac{\tan \phi_l - \tan \phi_k}{1 + \tan \phi_l \tan \phi_k} \right| \\ &= \left| \frac{a}{1 + 2a^2} \right| \\ &= \frac{a}{1 + 2a^2} \end{aligned}$$

$a > 0$ より $\tan \theta > 0$ であるから逆数を考えると、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{1 + 2a^2}{a} \\ &= 2a + \frac{1}{a} \\ &\geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{a}} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

であり、等号は $2a = \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときに成り立つ。

したがって、 $\tan \theta$ は $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ をとる。

- (2) k に関して l と対称な直線を l' とし、
 l' が x 軸の正の向きとなす角を $\alpha (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ とすると

$$\alpha = \phi_k + \theta$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan(\phi_k + \theta) \\ &= \frac{\tan \phi_k + \tan \theta}{1 - \tan \phi_k \tan \theta} \\ &= \frac{2a + \frac{a}{1 + 2a^2}}{1 - 2a \cdot \frac{a}{1 + 2a^2}} \\ &= \frac{2a(1 + 2a^2) + a}{(1 + 2a^2) - 2a^2} \\ &= 4a^3 + 3a \end{aligned}$$

である。

- (3) 点 A を通り y 軸に平行な直線と k に関して対称な直線が m であり、
 その傾きを m とすると、その方程式は

$$y = m(x - a) + a^2 \Leftrightarrow m(x - a) - y + a^2 = 0$$

とおける。 k と x 軸の交点を点 $B(\frac{a}{2}, 0)$ とし、点 A から x 軸に垂線 AH を下ろす。

点 B と直線 m の距離は $BH = \frac{a}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{\left| m\left(\frac{a}{2} - a\right) - 0 + a^2 \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} &= \frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow |m - 2a| &= \sqrt{m^2 + 1} \\ \Leftrightarrow (m - 2a)^2 &= m^2 + 1 \\ \Leftrightarrow m &= a - \frac{1}{4a} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

放物線 $C: y = x^2$ と直線 m の点 A とは異なる交点が点 $P(p, p^2)$ であるから

$$\begin{aligned} p^2 &= \left(a - \frac{1}{4a}\right)(p - a) + a^2 \\ \Leftrightarrow p^2 &= \left(a - \frac{1}{4a}\right)p + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow p^2 - \left(a - \frac{1}{4a}\right)p - \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (p - a) \left(p + \frac{1}{4a}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$p \neq a$ であるから、 $p = -\frac{1}{4a}$ である。

(1)	フ	ヘ	
	3	5	
(2)	ホ	マ	
	16	25	
(3)	ミ		
	2		
(4)	ム	メ	モ
	12	12	25

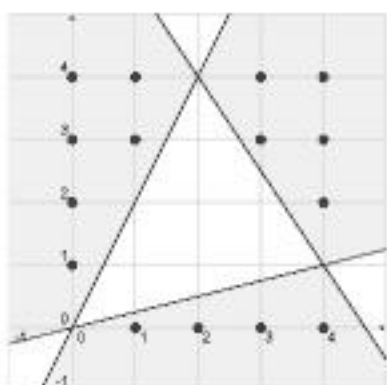


図 1 (1) の図

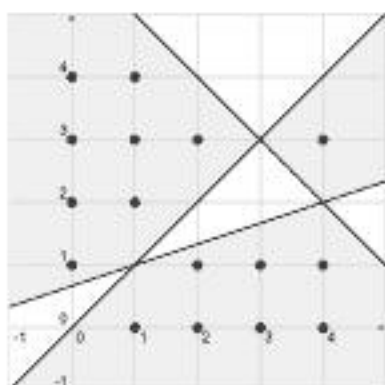
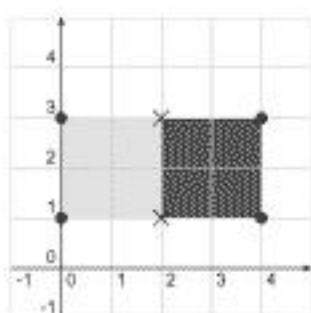
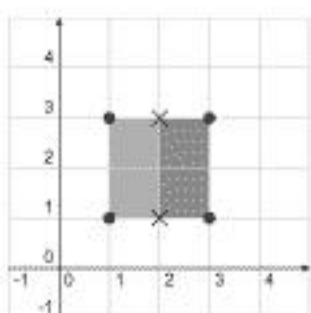
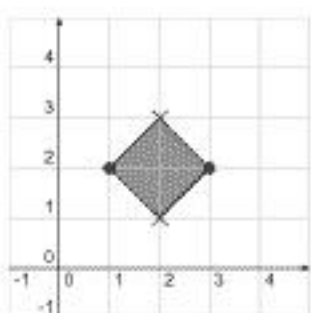


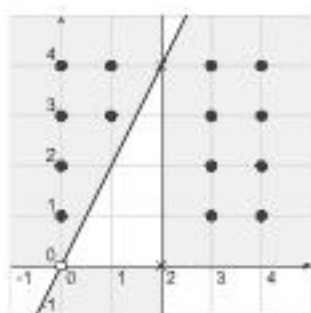
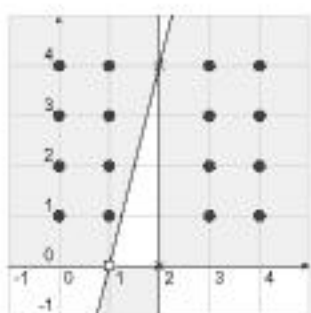
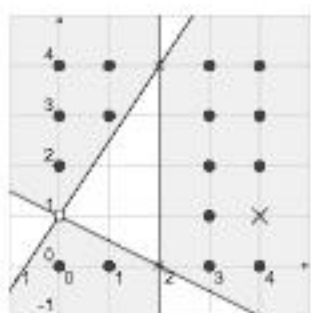
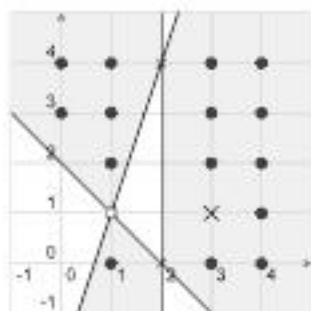
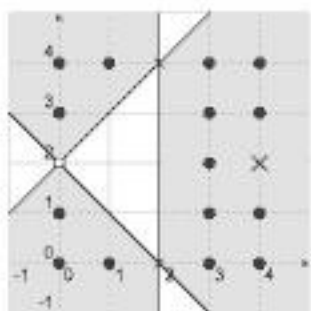
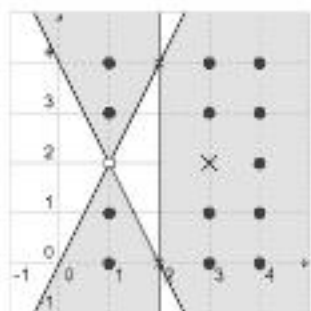
図 2 (2) の図

- (1) 3 点 $(0,0)$, $(2,4)$, $(4,1)$ が選ばれているとき、次の試行で図 1 の黄色の領域にある 15 個の黒丸の格子点の内の一つが選ばれれば、凸四角形ができる。
したがって、求める確率は $\frac{15}{5^2} = \frac{3}{5}$ である。
- (2) 3 点 $(1,1)$, $(3,3)$, $(4,2)$ が選ばれているとき、次の試行で図 2 の黄色の領域にある 16 個の黒丸の格子点の内の一つが選ばれれば、凸四角形ができる。
したがって、求める確率は $\frac{16}{25}$ である。
- (3) 長方形ができるには、次の 3 つの場合がある。

図 3 2×2 の正方形図 4 1×2 の長方形図 5 $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の正方形

5 個の長方形に対して、残りの 2 個の点を選ぶ順序がそれぞれ 2 通りずつあるから、求める確率は $\frac{5 \cdot 2!}{5^4} = \frac{2}{125}$ である。

- (4) 対称性を考慮して、3 番目の点が $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$ である 6 つの場合を考える。

図 6 $(0,0)$ の場合図 7 $(1,0)$ の場合図 8 $(0,1)$ の場合図 9 $(1,1)$ の場合図 10 $(0,2)$ の場合図 11 $(1,2)$ の場合

点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ については、自身を含めて対等な点が 4 個

点 $(0,2)$, $(1,2)$ については、自身を含めて対等な点が 2 個

ずつあるから、

直線 AB に関して対称な凸四角形ができるような点の選び方の総数は、

図 8 から図 11 までの $\times$ の格子点の個数を数えて

$$(1+1) \times 4 + (1+1) \times 2 = 12 \text{ (通り)}$$

ある。したがって、求める確率は $\frac{12}{5^4} = \frac{12}{625}$ である。

さらに、

直線 AB に関して対称でない凸四角形ができるような点の選び方の総数は、

図 6 から図 11 までの黒丸の格子点の個数を数えて

$$(14+16+16+15) \times 4 + (15+13) \times 2 = 300 \text{ (通り)}$$

ある。したがって、求める確率は $\frac{300}{5^4} = \frac{12}{25}$ である。