

【解答】

(1)

ア, 5 イ, 7 ウ, 9

(2)

エ, 6 オ, 5 カ, 6 キ, 6 ク, 5
ケ, 6 コ, 6 サ, 5 シ, 4

(3)

ス, 3 セ, 2 ソ, 9 タ, 2 チ, 4
ツ, 1

【解説】

(1)

 $n=3$ のとき、与式は、 $x+y+3z=3$ となり、これを満たす 0 以上の整数 x, y, z の組は、

$$(x, y, z) = (0, 0, 1), (0, 3, 0), (1, 2, 0), (2, 1, 0), (3, 0, 0)$$

の 5 通りである。同様に、 $n=4$ のとき、与式は、 $x+y+3z=4$ となり、これを満たす 0 以上の整数 x, y, z の組は、

$$(x, y, z) = (0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 4, 0), (1, 3, 0), (2, 2, 0), (3, 1, 0), (4, 0, 0)$$

の 7 通りである。最後に、 $n=5$ のとき、与式は、 $x+y+3z=5$ となり、これを満たす 0 以上の整数 x, y, z の組は、

$$(x, y, z) = (0, 2, 1), (1, 1, 1), (2, 0, 1), (0, 5, 0), (1, 4, 0), (2, 3, 0), (3, 2, 0), (4, 1, 0), (5, 0, 0)$$

の 9 通りである。

(2)

条件から、 z は、 $0 \leq z \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ の範囲を動く。そのそれぞれについて、 y は、 $0 \leq y \leq n-3z$ を動き、

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=0}^k (n-3i+1) \\ &= n(k+1) - \frac{3}{2}k(k+1) + k+1 \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6}(n^2+5n+6) & (n=3k) \\ \frac{1}{6}(n^2+5n+6) & (n=3k+1) \\ \frac{1}{6}(n^2+5n+4) & (n=3k+2) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

(3)

求める組の個数を b_m で表す。ここで、 $m=0$ のとき、 $b_0=1$ である。また、 $m \geq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} b_m &= b_0 + \sum_{k=1}^m (a_{3k} + a_{3k-2} + a_{3k-1}) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2}(9k^2 + 9k + 2) \\ &= \frac{3}{2}m^3 + \frac{9}{2}m^2 + 4m + 1 \end{aligned}$$

となり、この式は、 $m=0$ の場合にもあてはまる。

〔解答〕

テ, 4

ト, 5

ナ, 1

ニ, 2

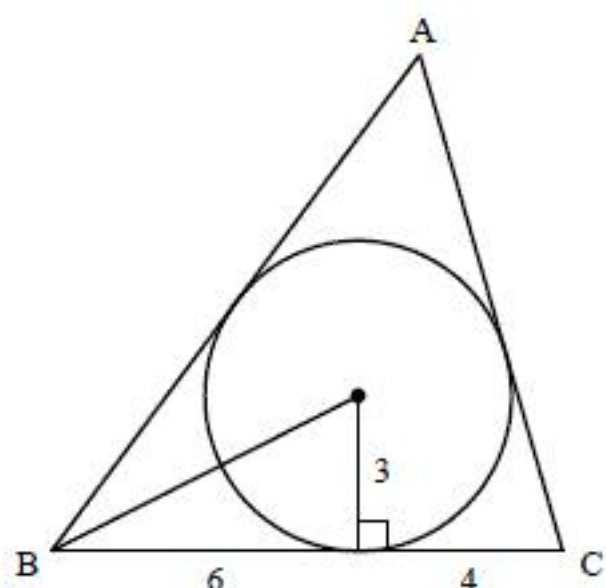
ヌ, 12

ネ, 25

ノ, 4

ハ, 48

〔解説〕



上図より

$$\begin{aligned}\sin \frac{B}{2} &= \frac{3}{\sqrt{6^2 + 3^2}} \\ &= \frac{3}{3\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \frac{B}{2} &= \frac{6}{3\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

であるから,

$$\sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \frac{4}{5}$$

となる。また,

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{1}{2}, \tan \frac{C}{2} = \frac{3}{4}$$

より,

$$\begin{aligned}\tan \frac{A}{2} &= \tan \left(90^\circ - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\tan \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right)} \\ &= \left(\frac{1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$AB = 6 + \frac{3}{\tan \frac{A}{2}} = 12$$

である。また、同様にして、 $AC = 10$ と求まる。ここで、外接円の半径を R とすると、正弦定理より、

$$\begin{aligned}2R &= \frac{AC}{\sin B} \\ \therefore R &= \frac{25}{4}\end{aligned}$$

であり、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、

$$S = \frac{3}{2}(AB + BC + CA) = 48$$

となる。

[解答]

(1)

ヒ, -2 フ, 3 ヘ, 3

(2)

ホ, 1 マ, 4 ミ, 1 ム, 18 メ, -23
モ, -19 ヤ, -5 ユ, -11 ヨ, -7 ラ, 7

[解説]

(1)

 $f(x)$ の絶対値を展開すると,

$$f(x) = \begin{cases} -3x + a + b + c & (x < a) \\ -x - a + b + c & (a \leq x < b) \\ x - a - b + c & (b \leq x < c) \\ 3x - a - b - c & (c \leq x) \end{cases}$$

となる。条件より,

$$4x + 3f(x) = \begin{cases} -5x + 3a + 3b + 3c & (x < a) \\ x - 3a + 3b + 3c & (a \leq x < b) \\ 7x - 3a - 3b + 3c & (b \leq x < c) \\ 13x - 3a - 3b - 3c & (c \leq x) \end{cases}$$

となるので, $x = a$ のときに, 最小値 $4a + 3f(a) = -2a + 3b + 3c$ となる。

(2)

 $f(x)$ の最小値は, $f(b)$ となる。したがって,

$$\begin{cases} f(b) = -a + c = 18 \\ f(c) = -a - b - 2c = 32 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b = a + 4 \\ c = a + 18 \end{cases}$$

が成り立つ。次に, $f(-12) = 25 < 32 = f(c)$ より, $-12 < c$ なので,

$$25 = f(-12) = \begin{cases} 36 + a + b + c & (-12 < a) \\ 12 - a + b + c & (a \leq -12 < b) \\ -12 - a - b + c & (b \leq -12 < c) \end{cases}$$

$$\therefore (a, b, c) = \begin{cases} (-11, -7, 7) & (-12 < a) \\ (-9, -5, 9) & (a \leq -12 < b) \\ (-23, -19, -5) & (b \leq -12 < c) \end{cases}$$

となる。このうち, $a \leq -12 < b$ のものは, 条件を満たさないので不適。よって,

$$(a, b, c) = (-11, -7, 7), (-23, -19, -5)$$

の2通りがある。