

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
-5	-14	4	-5	-7	2	-1	5	1	12	41	-12	-10

(1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 11 \\ x + y - xy = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)^2 + xy = 11 \\ x + y - xy = 9 \end{cases}$$

より,

$$(x+y, xy) = (-5, -14), (4, -5)$$

であり, これらを解くと $x < y$ となるのは

$$(x, y) = (-7, 2), (-1, 5)$$

(2) a_1 と a_2 との偶奇は一致する必要がある, また, その条件さえ満たせば全パターンに対して a_3 が1つずつ定まる. したがって求める確率は

$$\frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{6^3} = \frac{1}{12}$$

(3)

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 41$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{41}$$

$k\vec{a} + \vec{b} + l\vec{c}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直ということから

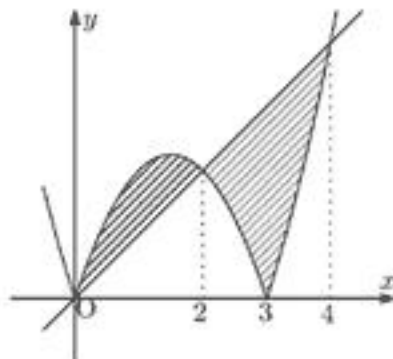
$$\begin{cases} k|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + l\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ k\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + l\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases} \therefore (k, l) = (-12, -10)$$

(1)

まずは交点の x 座標を求める。

$$x = |x^2 - 3x| \iff \begin{cases} x(x-2) = 0 & (0 \leq x \leq 3) \\ x(x-4) = 0 & (x < 0, 3 < x) \end{cases}$$

$$\therefore x = 0, 2, 4$$



したがって、求める面積 S は

$$S = \int_0^2 \{(-x^2 + 3x) - x\} dx + \int_2^3 x - (-x^2 + 3x) dx + \int_3^4 x - (x^2 - 3x) dx = \frac{13}{3}$$

(2) 直線 $y = kx$ は曲線と原点 $(0,0)$ を必ず共有する。それ以外の部分については、

$$\begin{cases} x < 0 & (k < -3) \\ 0 < x < 3 & (0 < k \leq 3) \\ 3 \leq x & (0 \leq k) \end{cases}$$

という条件の元、1点ずつ共有する。したがって、

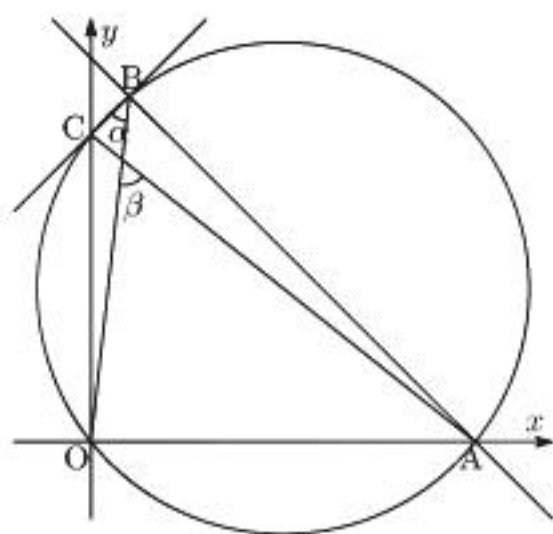
$$\begin{cases} k < -3 & \text{共有点は2個} \\ -3 \leq k < 0 & \text{共有点は1個} \\ k = 0 & \text{共有点は2個} \\ 0 < k < 3 & \text{共有点は3個} \\ 3 \leq k & \text{共有点は2個} \end{cases}$$

タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
1	9	82	10	49	4	5	49	31

直線 OA 上の点は全て $y = 0$ なので、点 $(x + 9y, 9x + 4y)$ は直線 $y = 9x$ 上にある。また、直線 OB は $by = (b + 8)x$ なので

$$\begin{cases} y = 9x \\ by = (b + 8)x \end{cases}$$

これが同じ直線を表すので、 $b = 1$



また、 $\triangle AOC$ は直角三角形なので 4 点 O, A, B, C を通る円の中心は線分 AC の中点になる。したがって

$$\left(1 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$\therefore a + 9c = 82$$

(ii) はまず、点 (x, y) と点 $(2x + y, 3x + 4y)$ が一致する必要十分条件を求めると

$$\begin{cases} x = 2x + y \\ y = 3x + 4y \end{cases}$$

より $x + y = 0$ である。したがって、直線 $AB(y = \frac{9}{1-a}(x-a))$ が直線 $y = -x$ と交点を持たなければ良いので、傾きに注目すると

$$-1 = \frac{9}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

$$\therefore a = 10$$

条件 (i), (ii) が満たされているとき、 $\alpha = (\text{直線 OB の傾き}) - (\text{直線 BC の傾き})$ より

$$\tan \alpha = \frac{9 - 1}{1 + 9 \cdot 1} = \frac{4}{5}$$

同様に $\beta = 180^\circ - ((\text{直線 OB の傾き}) - (\text{直線 AC の傾き}))$ より

$$\tan \beta = -\frac{9 - (-\frac{4}{5})}{1 + 9 \cdot (-\frac{4}{5})} = \frac{49}{31}$$