

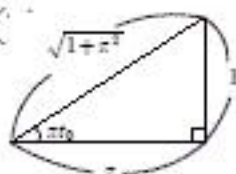
$$(1) \text{ 速度ベクトルを } \vec{v} \text{ とおくと } \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\cos \pi t - \pi \sin \pi t) \\ e^t(\sin \pi t + \pi \cos \pi t) \end{pmatrix}$$

よって  $t=1$  のとき

$$\vec{v} = (-e, -\pi e) \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad x' = 0 \iff \cos \pi t_0 = \pi \sin \pi t_0 \quad \dots\dots(1)$$

よって右図より



$$\sin \pi t_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}, \quad \cos \pi t_0 = \frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad (7) \iff \frac{1}{\pi} = \tan \pi t_0 \quad \text{であり } \tan \text{ は周期 } 1 \text{ の周期関数なので}$$

$$0 < t_0 < \frac{1}{2} \text{ に注意すると, } t_0, t_0+1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(4) \quad y' = 0 \iff \sin \pi t_1 = -\pi \cos \pi t_1 \quad \dots\dots(1) \quad (y' = 0 \text{ のときの時刻 } t \text{ を } t_1 \text{ とする})$$

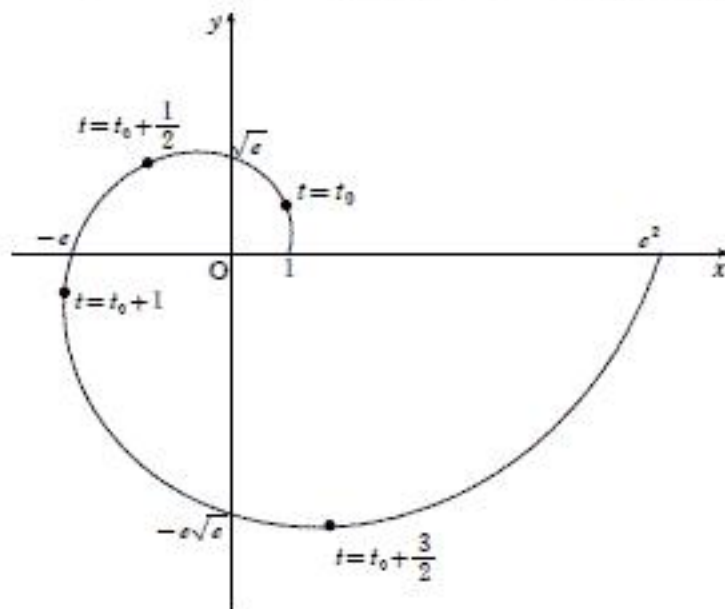
$$\iff \cos \pi \left( t_1 - \frac{1}{2} \right) = \pi \sin \pi \left( t_1 - \frac{1}{2} \right) \quad \text{この解は (3) より}$$

$$t_1 - \frac{1}{2} = t_0, t_0+1 \quad \therefore t_1 = t_0 + \frac{1}{2}, t_0 + \frac{3}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

注) (7) の全ての解は  $t_0 + n$  ( $n$  は任意の整数) なので

(1) の全ての解は  $t_0 + n + \frac{1}{2}$  となる.  $0 < t \leq 2$  を満たすのは上の答.

$$(5) \quad |\overrightarrow{OP}| = \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2} = e^t \text{ なので, 原点からの距離は指数関数的に増加する.}$$



$\dots\dots(\text{答})$

- (1) 求める直線を  $y = -kx + 1$  .....① ( $k > 0$ ) とおく.

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \text{ に代入して } \frac{x^2}{2} - (-kx + 1)^2 = 1$$

$$\iff \left(\frac{1}{2} - k^2\right)x^2 + 2kx - 2 = 0 \text{ .....②}$$

これが唯一の解をもつことが必要である.

- (i)  $\frac{1}{2} - k^2 = 0$  のとき  $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  である. ②は  $\sqrt{2}x - 2 = 0$   
 $\iff x = \sqrt{2}$  より確かに共有点は1つ

$$\text{①は } l: y = -\frac{\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{2}}x + \boxed{1} \text{ .....ア, イ, ウ}$$

- (ii)  $\frac{1}{2} - k^2 \neq 0$  のとき ②の判別式を  $D$  とおくと

$$D/4 = k^2 - \left(\frac{1}{2} - k^2\right)(-2) = -k^2 + 1 = 0 \text{ より } k = 1$$

$$\text{②は } -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0 \iff x = 2 \text{ より確かに共有点は1つ.}$$

$$\text{①は } m: y = -\boxed{1}x + \boxed{1} \text{ .....エ, オ}$$

$$y = 0 \text{ のとき } l \text{ の式より } x = \sqrt{2} \therefore B(\sqrt{\boxed{2}}, 0) \text{ .....カ}$$

$$y = 0 \text{ のとき } m \text{ の式より } x = 1 \therefore C(\boxed{1}, 0) \text{ .....キ}$$

- (2) 2点 A, C は, 直線  $y = x$  に関して対称な位置にあるので  
 $PA = PC \iff P \text{ は } y = x \text{ 上} \iff b = a \therefore P(a, a)$  とおける.

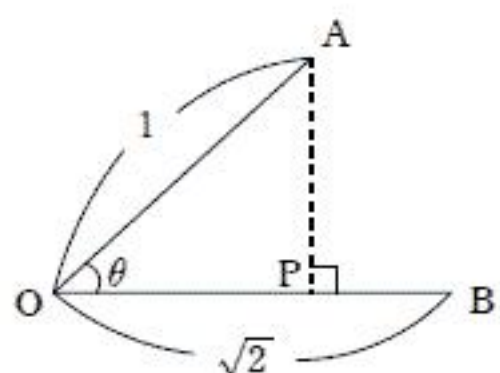
$$PB^2 = 2PA^2 \iff (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2\{x^2 + (y - 1)^2\}$$

$$\iff 0 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 4y = 0$$

$$\text{これに } (x, y) = (a, a) \text{ を代入して } 2a^2 + (2\sqrt{2} - 4)a = 0$$

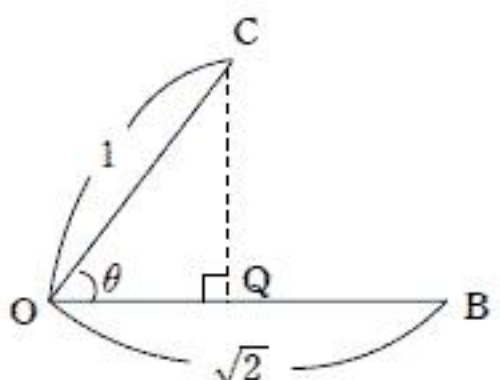
$$\therefore a = \boxed{0}, \boxed{2} - \sqrt{\boxed{2}} \text{ .....ク, ケ, コ}$$

(1)

 $\angle AOB = \theta$  とおくと  $OP$  の符号付き長さは

$$\begin{aligned} |\overline{OA}| \cos \theta &= \frac{|\overline{OA}| |\overline{OB}| \cos \theta}{|\overline{OB}|} \\ &= \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OB}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \overline{PA} &= \overline{OA} - \overline{OP} \\ &= \boxed{1} \overline{OA} + \frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \overline{OB} \end{aligned}$$

.....サ, シ, ス

 $\angle COB = \varphi$  とおくと  $OQ$  の符号付き長さは

$$\begin{aligned} |\overline{OC}| \cos \varphi &= \frac{|\overline{OC}| |\overline{OB}| \cos \varphi}{|\overline{OB}|} \\ &= \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OB}|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \therefore \overline{QC} &= \overline{OC} - \overline{OQ} \\ &= \frac{\boxed{-1}}{\boxed{6}} \overline{OB} + \boxed{1} \overline{OC} \end{aligned}$$

.....セ, ソ, タ

三平方の定理より  $|\overline{PA}| = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, |\overline{QC}| = \sqrt{1 - \frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$

$$\therefore \frac{|\overline{QC}|}{|\overline{PA}|} = \frac{\sqrt{\boxed{17}}}{\boxed{3}} \text{.....チ, ツ}$$

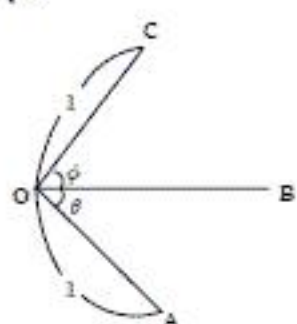
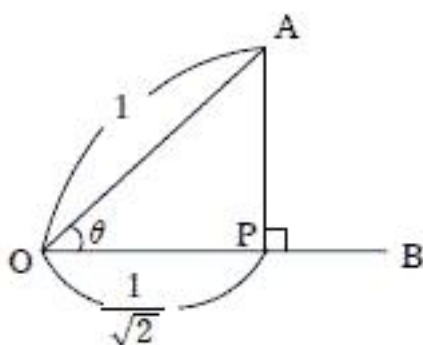
$$\begin{aligned} (2) \quad \overline{PA} \cdot \overline{QC} &= \left( \overline{OA} - \frac{1}{2} \overline{OB} \right) \cdot \left( \overline{OC} - \frac{1}{6} \overline{OB} \right) \\ &= \overline{OA} \cdot \overline{OC} - \frac{1}{6} \overline{OA} \cdot \overline{OB} - \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{OC} + \frac{1}{12} |\overline{OB}|^2 = k - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0 \\ \therefore k &= \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}} \text{.....テ, ト} \end{aligned}$$

(3)

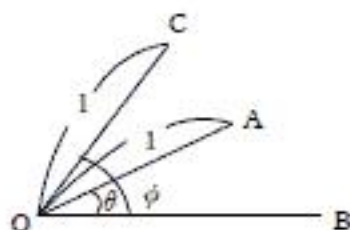
$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より } \theta = 45^\circ \text{ である.}$$

$$\text{また } \cos \varphi = \frac{1}{3\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より } \varphi > \theta \text{ である.}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} \text{ に注意する.}$$



と



の場合がある.

$$\begin{aligned} k &= \overline{OA} \cdot \overline{OC} = |\overline{OA}| |\overline{OC}| \cos(\varphi \pm \theta) = \cos(\varphi \pm 45^\circ) \\ &= \cos \varphi \cos 45^\circ \mp \sin \varphi \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}} (1 \pm \sqrt{\boxed{17}}) \text{ .....ナ, ニ, ヌ}$$

$$(1) \quad 3^2 = \boxed{9} \quad \dots\dots \text{ネ}$$

$a_1 = 2$  のとき  $a_2 = 4, 5, 6$  で そのうち奇数は 1 つ

$a_1 = 1, 3$  のとき  $a_2 = 1, 2, 3$  で そのうち奇数は 2 つ

$$\therefore 1 + 2 \times 2 = \boxed{5} \quad \dots\dots \text{ノ}$$

$a_2$  が偶数になるのは  $3^2 - 5 = 4$  通り.  $a_3 = 4, 5, 6$  で, 内, 奇数は 1 つ

$a_2$  が奇数になるのは 5 通り.  $a_3 = 1, 2, 3$  で, 内, 奇数は 2 つ

$$\therefore 4 \times 1 + 5 \times 2 = \boxed{14} \quad \dots\dots \text{ハ}$$

$$(2) \quad \boxed{3}^n \quad \dots\dots \text{ヒ}$$

$a_n$  が奇数になる数列が  $b_n$  通りあるとする.

$a_n$  が偶数になるのは  $3^n - b_n$  通り. このとき  $a_{n+1}$  が奇数になるのは  $a_{n+1} = 5$  のみで 1 通り

$a_n$  が奇数になるのは  $b_n$  通り. このとき  $a_{n+1}$  が奇数になるのは  $a_{n+1} = 1, 3$  で 2 通り. よって

$$b_{n+1} = (3^n - b_n) \times 1 + b_n \times 2 = b_n + 3^n$$

$$\therefore b_n = b_1 + (3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1})$$

ここで  $b_1 = 2$  なので

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + (1 + 3 + \dots + 3^{n-1}) = 1 + \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 1 + \frac{3^n - 1}{2} \\ &= \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \left( \boxed{3}^n + \boxed{1} \right) \quad \dots\dots \text{フ, ヘ, ホ, マ} \end{aligned}$$

(3)  $a_j$  から出発すると  $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots$  はそれぞれ 3 通りなので. よって  $a_n$  までに  $3^{n-j}$  倍となる.

$$\therefore k_j = e_j \times 3^{n-j} = \frac{1}{2} (3^j + 1) \times 3^{n-j} = \frac{1}{2} (3^n + 3^{n-j})$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n k_j &= \frac{1}{2} 3^n \times n + (3^{n-1} + \dots + 3 + 1) = \frac{n}{2} \times 3^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{2} \\ &= \left( \frac{n}{\boxed{2}} + \frac{1}{\boxed{4}} \right) \boxed{3}^n - \frac{1}{\boxed{4}} \quad \dots\dots \text{ミ, ム, メ, モ} \end{aligned}$$