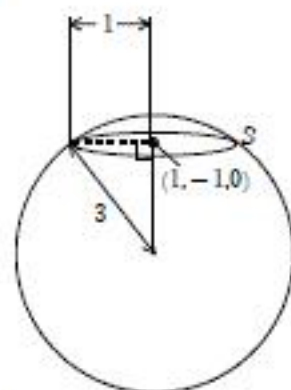


1

(1)

三平方の定理より 球の中心と xy 平面の距離

$$h = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

 $\therefore$ 中心は $(\boxed{1}, \boxed{-1}, -\boxed{2}\sqrt{\boxed{2}})$ ア, イ, ウ, エ

(2)

左図において 方べきの定理より

$$AP \times AQ = \{a - (3 - 2\sqrt{2})\} \{a - (-3 - 2\sqrt{2})\}$$

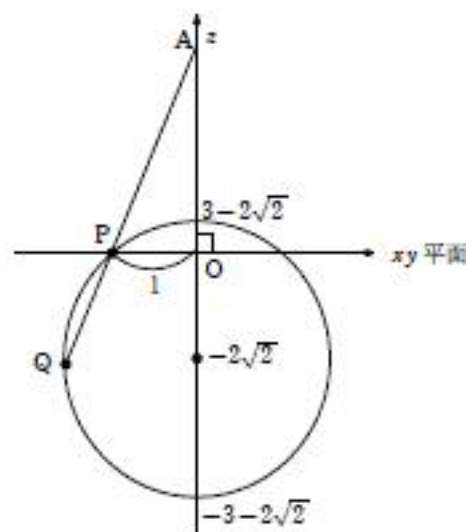
$$AP \times tAP = \{(a + 2\sqrt{2}) - 3\} \{(a + 2\sqrt{2}) + 3\}$$

$$tAP^2 = (a + 2\sqrt{2})^2 - 3^2$$

$$t(a^2 + 1) = a^2 + 4\sqrt{2}a - 1$$

$$\therefore t = \frac{a^2 + 4\sqrt{2}a - 1}{a^2 + 1}$$

$$= \frac{a^2 + \boxed{4}\sqrt{\boxed{2}}a + \boxed{-1}}{a^2 + \boxed{1}} \text{オ, カ, キ, ク}$$



(3)

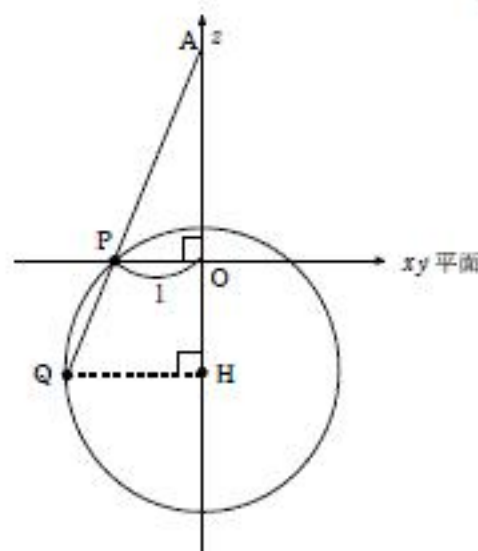
AQ = tAP より QH = tPO = t によって, 求める半径は t に等しい.

 $a = 3$ を代入して

$$\therefore t = \frac{9 + 12\sqrt{2} - 1}{9 + 1}$$

$$= \frac{4 + 6\sqrt{2}}{5}$$

$$= \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}} + \frac{\boxed{6}}{\boxed{5}}\sqrt{\boxed{2}} \text{ケ, コ, サ, シ, ス}$$



(1) $3x^3 = 3(x-a)^3 + a$ が異なる 2 実解をもつ範囲が答である.

この式を整理すると $9ax^2 - 9a^2x + 3a^3 - a = 0 \dots\dots ①$ となる.

$a > 0$ なので, a で割ることができて $9x^2 - 9ax + 3a^2 - 1 = 0$

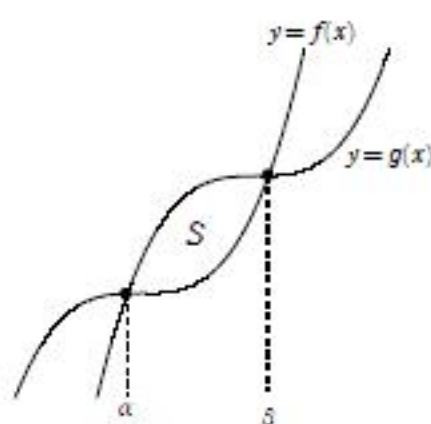
判別式を D とおくと

$$D = (9a)^2 - 4 \cdot 9(3a^2 - 1) = 9(-3a^2 + 4)$$

$$\therefore D > 0 \iff a^2 < \frac{4}{3} \iff -\frac{2}{\sqrt{3}} < a < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$a > 0 \text{ なので, } 0 < a < \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \sqrt{\boxed{3}} \dots\dots \text{セ, ソ, タ}$$

(2) ①の 2 解を $x = \alpha, \beta$ とおく.



$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx = \int_{\alpha}^{\beta} (-9ax^2 + \dots) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} 9a(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{9a}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{3}{2} a \{(\beta - \alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

解と係数の関係より $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = \frac{3a^2 - 1}{9}$ なので

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4 \cdot \frac{3a^2 - 1}{9} = \frac{4 - 3a^2}{9}$$

$$\therefore S = \frac{3}{2} a \left(\frac{4 - 3a^2}{9} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} a \cdot \frac{(4 - 3a^2)^{\frac{3}{2}}}{27} = \frac{a}{18} (\boxed{-3}a^2 + \boxed{4})^{\frac{3}{2}} \dots\dots \text{チ, ツ}$$

(3) $(18S)^2 = a^2(-3a^2 + 4)^3$ $a^2 = t$ とおくと, $t > 0$ であり,

右辺は $t(-3t + 4)^3$ となる. これを $h(t)$ とおくと,

$$h'(t) = (-3t + 4)^3 + t \cdot 3(-3t + 4)^2 \times (-3) = (-12t + 4)(-3t + 4)^2$$

増減表は

t	0	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{4}{3}$
$h'(t)$	/	+	0	-	/
$h(t)$	/	↗	9	↘	/

$\therefore t = \frac{1}{3}$ のとき $(18S)^2$ は最大値 9 となる.

$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $18S$ は最大値 3 となる.

よって S は $a = \frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{3}}$ のとき 最大値 $\frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}$ $\dots\dots \text{テ, ト, ナ, ニ}$

$$(1) \quad P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ のとき } P^{-1} = \frac{1}{1 \times 3 - 1 \times 2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x-3 & 3x-4 \\ -2x+3 & -2x+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore q_1 = \boxed{0} \dots\dots \text{ヌ}$$

$$PA^2P^{-1} = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 1+x & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore s_2 = \boxed{1} \dots\dots \text{ネ}$$

$$PA^nP^{-1} = (PAP^{-1})^n = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n, \text{ この値は帰納的に } \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 1+x+\dots+x^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_n = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1} \text{ の次数は } \boxed{1}n + \boxed{-1} \dots\dots \text{ノ, ハ}$$

$$(2) \quad A^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 1+x+\dots+x^{n-1} & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 1+x+\dots+x^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x^n - (1+x+\dots+x^{n-1}) & -1 \\ -2x^n - (1+x+\dots+x^{n-1}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x^n - (1+x+\dots+x^{n-1}) - 2 & 3x^n - (1+x+\dots+x^{n-1}) - 3 \\ -2x^n - (1+x+\dots+x^{n-1}) + 2 & -2x^n - (1+x+\dots+x^{n-1}) + 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore u_{10} = 3x^{10} - (1+x+\dots+x^9) - 3$$

$$x=0 \text{ を代入すると } -1-3 = \boxed{-4} \dots\dots \text{ヒ}$$

$$x=1 \text{ を代入すると } 3-10-3 = \boxed{-10} \dots\dots \text{フ}$$

$$x=-1 \text{ を代入すると } 3-0-3 = \boxed{0} \dots\dots \text{ヘ}$$

$$(3) \quad y = \frac{u_n}{x^n} = 3 - \left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{1}{x} \right) - \frac{3}{x^n} \quad 0 < \pi \leq \boxed{1} \dots\dots \text{ホ}$$

$$\text{のとき } \frac{1}{x} \geq 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty \text{ となる.}$$

$$y_n = \frac{u_n}{x^n} = \frac{3x^n - \frac{1-x^n}{1-x}}{x^n} = 3 - \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{1-x} - \frac{3}{x^n},$$

$$1 < x \text{ のとき } 0 < \frac{1}{x} < 1 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 3 - \frac{0-1}{1-x} + 0 = 3 + \frac{1}{1-x}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 3 - \frac{1}{x-1} = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{\boxed{3}x + \boxed{-4}}{x + \boxed{-1}} \dots\dots \text{マ, ミ, ム}$$

- (1)

1	2	3
2	3	1
3	1	2

 右の表より 2 通り ……メ

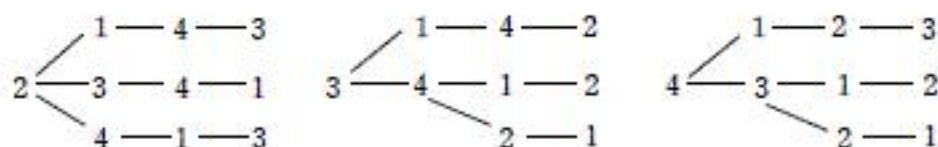
- (2) $k=2$ のとき一致する区画の選び方は ${}_4C_2=6$ 通り. 残りの区画の数字は入れ替えるだけなので一通りに決まる. 6 ……モ

$k=1$ のとき, 一致する区画の選び方は ${}_4C_1=4$ 通り.

残りの区画は 3ヶ所あり, 数字の入れ方は, (1) で求めたように 2 通りある.

$$\therefore 4 \times 2 = \boxed{8} \text{ 通り } \dots\dots\text{ヤ}$$

$k=0$ のとき



上の樹形図より $3 \times 3 = \boxed{9}$ 通り ……ユ

- (3) $k=3$ のとき, (2) と同様に考えて

$${}_5C_3 \times 1 = \boxed{10} \text{ 通り } \dots\dots\text{ヨ}$$

$k=2$ のとき

$${}_5C_2 \times 2 = \boxed{20} \text{ 通り } \dots\dots\text{ラ}$$

$k=1$ のとき

$${}_5C_1 \times 9 = \boxed{45} \text{ 通り } \dots\dots\text{リ}$$

- (4) $k=5$ のとき, 1 通り, $k=4$ のとき 0 通り.

よって確率分布表は

k	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{44}{5!}$	$\frac{45}{5!}$	$\frac{20}{5!}$	$\frac{10}{5!}$	0	$\frac{1}{5!}$

$$\begin{aligned} \text{期待値は } E(X) &= 0 \times \frac{44}{5!} + 1 \times \frac{45}{5!} + 2 \times \frac{20}{5!} + 3 \times \frac{10}{5!} + 5 \times \frac{1}{5!} \\ &= \frac{120}{5!} = \boxed{1} \dots\dots\text{ル} \end{aligned}$$

【別解】

$$X_i = \begin{cases} 0 & (\text{区画 } i \text{ の数字が } i \text{ でない}) \\ 1 & (\text{区画 } i \text{ の数字が } i \text{ である}) \end{cases} \text{ とおくと}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^5 X_i\right) = \sum_{i=1}^5 E(X_i) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{5} = \boxed{1} \dots\dots\text{ル}$$

注) $k=0$ となる確率は $\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!}$ であることが知られている.