

(2008年度)

2 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は5ページ, 3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机の上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき, 枠からはみ出したり, 枠のなかに白い部分を残したり, 文字や番号, 枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しきらずばきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位												1 の 位											
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位												1 の 位											
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1

- (1) 座標平面の $1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 4$ の範囲にある x 座標も y 座標も整数である点 (x, y) 全体の集合を U とし, U の部分集合 A, B を

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in U \text{ かつ } x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0\}$$

$$B = \{(x, y) \mid (x, y) \in U \text{ かつ } x + y = 7\}$$

で定める。このとき, 全体集合 U に関する A の補集合 $\bar{A}$ の要素の個数は ア 個であり, $\bar{A} \cap B$ の要素の個数は イ 個である。

- (2) 1, 1, 2, 2, 3, 3 の 6 つの数字をすべて使って 6 桁の整数を作る。このような 6 桁の整数は全部で ウ 個あり, このうち 220000 より大きいものは エ 個ある。

- (3) $(a + b + c + d + e)^3$ を展開して同類項をまとめてできる項の個数は オ 個である。

- (4) 自然数 p, q は $p + q = 100$ を満たし, 1 以外に公約数を持たないとする。有理数 $x = \frac{q}{p}$ の平方根 $\sqrt{x}$ の小数第 2 位以下を切り捨てると 1.5 となる。このとき, $x = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$ である。

2 $0 \leq \theta \leq \pi$ である θ について,

$$A = -\frac{1}{2} \cos 2\theta + \cos \theta + \frac{21}{4}$$

$$B = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{11}{2}$$

とおく。

(1) A のとり得る整数の値は , , である。

ただし, < < とする。

(2) B のとり得る整数の値は , である。

ただし, < とする。

(3) x についての 2 次方程式

$$x^2 - Ax + B = 0$$

が 2 つの整数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとする。このとき,

$$\theta = \frac{\text{ス}}{\text{セ}}\pi, \quad \alpha = \text{ソ}, \quad \beta = \text{タ}$$

または

$$\theta = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}\pi, \quad \alpha = \text{テ}, \quad \beta = \text{ト}$$

である。ただし, $\frac{\text{ス}}{\text{セ}} < \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$ とする。

3 a を実数とし、座標平面上の放物線 $C_a: y = \frac{1}{4}x^2 - ax + a^2 + a - 2$ および $C: y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$ を考える。

(1) C_a の頂点は直線 $y = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}x + \boxed{\text{ヌ}}$ 上にある。

(2) $a = 3$ のとき、 C と C_a の両方に同時に接する直線は 2 つあり、その傾きは

$$\frac{1}{2} \left(\boxed{\text{ネ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ノ}}} \right),$$

その 2 直線の交点の座標は $\left(\boxed{\text{ハ}}, \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} \right)$ である。

(3) C と C_a が異なる 2 点で交わるのは $\boxed{\text{ヘ}} < a < \boxed{\text{ホ}}$ のときである。このとき、 C と C_a で囲まれる図形の面積を S とすると

$$S = \frac{2}{3} \left(\sqrt{\boxed{\text{マ}} a^2 + \boxed{\text{ミ}} a + \boxed{\text{ム}}} \right)^3$$

であり、 S は $a = \boxed{\text{メ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{モ}}$ をとる。