

(2008年度)

8 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は6ページ, 4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
 2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
 3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のみミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
 4. 左側のミシン目は切り離してはならない。
 5. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
 6. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
 7. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
 8. マークをするとき, 枠からはみ出したり, 枠のなかに白い部分を残したり, 文字や番号, 枠などに○や×をつけたりしてはならない。
 9. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
 10. 問題Ⅰの解答は, 記述式解答用紙Aに記入すること。
足りない場合は, その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には何も書いてはならない。
 11. マーク式解答用紙の最下段のⅠの欄には記入しないこと。
 12. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
 13. 試験時間中に退場してはならない。
 14. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
 15. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。
- ◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

問題 **1** の解答は解答用紙 A (マーク用解答用紙の上に添付された白紙の解答用紙) に記せ。解答用紙 A では、式だけでなく、解答の流れを文章も含めて適切に説明すること。

問題 **2** から問題 **4** の解答は、**ア** から **モ** について、あてはまる数値をマークせよ。ただし、 e は自然対数の底、 π は円周率とする。

1 xy 平面上の点 $P(x, y)$ は時刻 t の関数として、 $t \geq 0$ のとき、

$$\begin{cases} x = e^t \cos \pi t \\ y = e^t \sin \pi t \end{cases}$$

で表される。

- (1) 時刻 $t = 1$ における点 P の速度を求めよ。
- (2) 点 P の速度の x 成分が 0 になる時刻 t のうち、 $t > 0$ で、もっとも 0 に近いものを t_0 とするとき、 $\sin \pi t_0$ 、 $\cos \pi t_0$ を求めよ。
- (3) $0 < t \leq 2$ において、点 P の速度の x 成分が 0 になる時刻をすべて求め、 t_0 を用いて表せ。
- (4) $0 < t \leq 2$ において、点 P の速度の y 成分が 0 になる時刻をすべて求め、 t_0 を用いて表せ。
- (5) $0 \leq t \leq 2$ のとき、点 P は平面上にどのような曲線を描くか。概形を図示せよ。解答用紙には概形とともに、(3) と (4) で求めた時刻における点 P のおよその位置および曲線と座標軸との交点の座標も記入すること。

2 xy 平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$$

を考える。

- (1) 点 $A(0,1)$ を通り、かつ、この双曲線と共有点を 1 つしかもたない直線のうち、傾きが負であるものは、

$$\ell : y = -\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}x + \boxed{\text{ウ}}$$

と

$$m : y = -\boxed{\text{エ}}x + \boxed{\text{オ}}$$

である。ただし、 $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} < \boxed{\text{エ}}$ とする。また、 ℓ と x 軸の

交点を B とすると $B\left(\sqrt{\boxed{\text{カ}}}, 0\right)$ であり、 m と x 軸の交点を C とすると $C\left(\boxed{\text{キ}}, 0\right)$ である。

- (2) a, b を定数とする。点 $P(a, b)$ が $PA = PC$ かつ $PB^2 = 2PA^2$ を満たすとする。このとき

$$a = \boxed{\text{ク}} \quad \text{または} \quad a = \boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{ク}} < \boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ とする。

- 3 空間内に4点 O, A, B, C があり, $|\vec{OA}| = 1$, $|\vec{OB}| = \sqrt{2}$, $|\vec{OC}| = 1$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1$, $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \frac{1}{3}$, $\vec{OC} \cdot \vec{OA} = k$ とする。点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を P とし, 点 C から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を Q とする。

$$(1) \vec{PA} = \boxed{\text{サ}} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \vec{OB}, \quad \vec{QC} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \vec{OB} + \boxed{\text{タ}} \vec{OC},$$

$$\frac{|\vec{QC}|}{|\vec{PA}|} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}} \text{である。}$$

$$(2) \vec{PA} \text{ と } \vec{QC} \text{ が直交するとき, } k = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \text{である。}$$

- (3) 4点 O, A, B, C が同一平面上にあるとき,

$$k = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \left(1 \pm \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}} \right)$$

である。

- 4 n を 2 以上の自然数とする。集合 $A = \{1, 2, 3\}$ と集合 $B = \{4, 5, 6\}$ から次の 2 つの規則で有限数列 $a_1, \dots, a_n$ をつくる。

規則 1: $a_1 \in A$ である。

規則 2: $j = 1, \dots, n-1$ に対し, a_j が偶数ならば $a_{j+1} \in B$ であり, a_j が奇数ならば $a_{j+1} \in A$ である。

(1) $n = 2$ のとき, 数列 a_1, a_2 は全部で ネ 通りある。その中で

a_2 が奇数になる数列 a_1, a_2 は全部で ノ 通りある。

$n = 3$ のとき, a_3 が奇数になる数列 a_1, a_2, a_3 は全部で ハ 通りある。

(2) 一般の n に対し, 数列 $a_1, \dots, a_n$ は全部で ヒ ^{n} 通りある。
その中で a_n が奇数になる数列は全部で

$$\frac{\text{フ}}{\text{ヘ}} \left(\text{ホ}^n + \text{マ} \right)$$

通りある。

(3) n を固定し, $j = 1, \dots, n$ とする。数列 $a_1, \dots, a_n$ の中で a_j が奇数になる数列は全部で k_j 通りであるとする。このとき

$$\sum_{j=1}^n k_j = \left(\frac{n}{\text{ミ}} + \frac{1}{\text{ム}} \right) \cdot \text{メ}^n - \frac{1}{\text{モ}}$$

である。