

(2008年度)

7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は6ページ, 4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机の上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき, 枠からはみ出したり, 枠のなかに白い部分を残したり, 文字や番号, 枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

ア から ル に当てはまる数値をマークせよ。

- 1 xyz 空間に中心の z 座標が負で半径が 3 の球面がある。平面 $z = 0$ と球面との交わりは点 $(1, -1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 S である。

(1) 球面の中心は $(\text{ア}, \text{イ}, -\text{ウ} \sqrt{\text{エ}})$ である。

(2) 点 $A(1, -1, a)$ と円 S 上の点 P と球面上の点 Q の 3 点が $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ を満たすとする。ただし、 t は 1 と異なる実数である。このとき

$$t = \frac{a^2 + \text{オ} \sqrt{\text{カ}} a + \text{キ}}{a^2 + \text{ク}}$$

である。

(3) $a = 3$ とする。点 P が円 S 上を動くとき、点 Q が描く円の半

径は $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}} + \frac{\text{サ}}{\text{シ}} \sqrt{\text{ス}}$ である。

- 2 3 次関数 $f(x) = 3x^3$, $g(x) = 3(x - a)^3 + a$ を考える。 a は正の数である。

- (1) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は $0 < a < \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。

- (2) a の値が (1) の範囲にあるとき, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ によって囲まれる部分の面積を S とおく。

$$S = \frac{a}{18} \left(\boxed{\text{チ}} a^2 + \boxed{\text{ツ}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

である。

- (3) S は $a = \frac{\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき最大値 $\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ をとる。

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 3x-3 & 3x-4 \\ -2x+3 & -2x+4 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $n = 1, 2, \dots$ に対し,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$$

とおく。 $n = 1$ のとき, $q_1 = \boxed{\text{ヌ}}$ であり, $n = 2$ のとき, $s_2 = \boxed{\text{ネ}}$ である。一般に, 自然数 n に対し, r_n は x についての整式であり, その次数は $\boxed{\text{ノ}}$ $n + \boxed{\text{ハ}}$ である。

(2) $n = 1, 2, \dots$ に対し, $A^n = \begin{pmatrix} t_n & u_n \\ v_n & w_n \end{pmatrix}$ とおくと, u_n は x についての整式である。 $n = 10$ のとき, 整式 u_{10} の x に 0 を代入した値は $\boxed{\text{ヒ}}$, 1 を代入した値は $\boxed{\text{フ}}$, -1 を代入した値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

(3) $n = 1, 2, \dots$ に対し, $y_n = \frac{u_n}{x^n}$ とおく。 $0 < x \leq \boxed{\text{ホ}}$ のとき
数列 $\{y_n\}$ は $-\infty$ に発散し, $\boxed{\text{ホ}} < x$ のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{\boxed{\text{マ}} x + \boxed{\text{ミ}}}{x + \boxed{\text{ム}}}$$

である。

- 4 図のように 1 から n までの番号がついた n 個の区画がある。

1	2		n
			

別に 1 から n までの番号札を用意して、各区画に 1 枚ずつ置いて並べる。 n 個の区画の中で、区画の番号と置いてある札の番号が一致している区画の数を k とする。

例： $n = 5, k = 2$

1	2	3	4	5
4	2	1	3	5

- (1) $n = 3$ のとき、 $k = 0$ となる並べ方は 通りである。
- (2) $n = 4$ のとき、 $k = 2$ となる並べ方は 通り、 $k = 1$ となる並べ方は 通り、 $k = 0$ となる並べ方は 通りである。
- (3) $n = 5$ のとき、 $k = 3$ となる並べ方は 通り、 $k = 2$ となる並べ方は 通り、 $k = 1$ となる並べ方は 通りである。
- (4) 番号札をよく切って並べるとする。 $n = 5$ のとき、 k の期待値は である。