

(2009年度)

6 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は5 ページ, 3 問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき, 枠からはみ出したり, 枠のなかに白い部分を残したり, 文字や番号, 枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

- 1 座標平面上の放物線 $C_0 : y = x^2$ と C_0 上にない点 $A(a, b)$ が与えられている。

- (1) C_0 上の点 P と A を結ぶ線分 PA の中点を M とする。 P が C_0 上を動くとき、 M のえがく曲線 C_1 は

$$C_1 : y = \boxed{\text{ア}} x^2 + \boxed{\text{イ}} ax + \frac{1}{2} \left(\boxed{\text{ウ}} a^2 + \boxed{\text{エ}} b \right)$$

で与えられる。

- (2) 2つの曲線 C_0 と C_1 が異なる2点で交わるための必要十分条件は

$$\boxed{\text{オ}} a^2 + b < 0$$

である。このとき、2つの交点を Q, R とすると Q, R を通る直線の方程式は

$$y = \boxed{\text{カ}} ax + \frac{1}{2} \left(\boxed{\text{キ}} a^2 + \boxed{\text{ク}} b \right)$$

である。

- (3) 2点 A, Q を通る直線の傾きを m_1 、2点 A, R を通る直線の傾きを m_2 とすると

$$m_1 m_2 = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} a^2 + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} b$$

が成り立つ。

- 2 正四面体 OABC を考える。動点 P は時刻 $t = 0$ のとき、O にいるものとする。P は 1 秒ごとに隣り合った頂点に等しい確率で移動する。たとえば、O から A, B, C の各頂点に移動する確率は、それぞれ $\frac{1}{3}$ であり、また A から O, B, C の各頂点に移動する確率も、それぞれ $\frac{1}{3}$ である。P が $t = n$ 秒のときに頂点 O, A, B, C にいる確率をそれぞれ O_n, A_n, B_n, C_n とする。

$$(1) O_2 = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}, A_2 = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}, O_3 = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \text{ である。}$$

- (2) 図形の対称性よりすべての自然数 n に対して

$$A_n = \boxed{\text{テ}} B_n = \boxed{\text{ト}} C_n$$

である。

- (3) すべての自然数 n に対して、 $t = n$ 秒のとき、P は O, A, B, C のいずれかの頂点にいるので、

$$\boxed{\text{ナ}} A_n + \boxed{\text{ニ}} O_n = 1$$

が成り立つ。

- (4) すべての自然数 n に対して $O_{n+1} = \boxed{\text{ヌ}} A_n$ が成り立つ。

- (5) すべての自然数 n に対して

$$O_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} O_n + \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

が成り立ち

$$O_n = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}} \left(\frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}} \right)^{n-1} + \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$$

となる。

3 $f(x) = |x(x^2 - 1)| - x^2$ とする。

- (1) $y = f(x)$ で表される座標平面上の曲線を C とする。 C と x 軸の共有点は メ 個あり, そのうち x 座標が最大である点は

$$\left(\frac{\text{モ} + \sqrt{\text{ヤ}}}{\text{ユ}}, 0 \right)$$

である。

- (2) 関数 $f(x)$ の極大値は $\frac{\text{ヨ}}{\text{ラ}}$ であり, 最小値は リ である。

- (3) k を実数とする。2つの曲線 $y = |x(x^2 - 1)|$ と $y = x^2 + k$ の共有点の個数は最大 ル 個である。共有点の個数が ル 個であるための必要十分条件は

$$\text{レ} < k < \frac{\text{ロ}}{\text{ワ}}$$

である。