

(2009年度)

5 数 学 問 題 (60分)

(この問題冊子は5ページ、3問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し、机の上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は、HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1 (1) $m \leq \log_3 1000 < m+1$ をみたす整数 m は ア である。

$n \leq \log_2 \frac{1}{200} < n+1$ をみたす整数 n は イ である。

(2) $0 \leq \alpha < 2\pi$ で, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ならば

$$\sin 2\alpha = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}} \sqrt{\text{オ}}, \quad \sin 4\alpha = \frac{\text{カ}}{\text{キ}} \sqrt{\text{ク}}$$

である。また、自然数 m が $\frac{\pi}{m+1} \leq \alpha < \frac{\pi}{m}$ をみたすとき、

m は ケ である。

(3) 1 次関数 $f(x) = ax + b$ で、次の条件

$$3 \leq f(1) \leq 6, \quad 4 \leq f(2) \leq 8$$

をみたすものを考える。

このような 1 次関数 $f(x)$ のなかで、 $f(5)$ が最大となるのは、

$a = \text{コ}$, $b = \text{サ}$ のときで、 $f(5) = \text{シ}$ である。

また、 $f(5)$ が最小となるのは、 $a = \text{ス}$, $b = \text{セ}$ のときで、

$f(5) = \text{ソ}$ である。

2 2次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える。

(1) a, b を自然数とし, $f(5), f(9)$ がともに 13 で割り切れるとする。

このとき, a を 13 で割った余りは タ であり, b を 13 で割った余りは チ である。

(2) a, b, c を実数とし, $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ とする。 $F(x)$ を $f(x)$ で割った商が $\frac{1}{3}x - 1$, 余りが $-8x + 24$ であるとき,

$$a = \text{ツ}, b = \text{テ}$$

である。また, c は ト, ナ, ニ のいずれかである。

ただし ト < ナ < ニ とする。

(3) a, b を実数とし, $g(x) = xf(x)$ とする。 $g(x)$ が極大値と極小値をもつための必要十分条件は

$$a^2 + \text{ヌ} b > 0$$

である。

3

三角形 ABC は 1 辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正三角形で、点 P_1 は辺 BC 上の C と異なる点とする。まず点 P_1 から辺 CA 上に垂線 P_1P_2 を引く。次に点 P_2 から辺 AB 上に垂線 P_2P_3 を引く。さらに点 P_3 から辺 BC 上に垂線 P_3P_4 を引く。同様の操作を繰り返して、点 P_5 , 点 P_6 , 点 P_7 , ... を決める。自然数 n に対して、線分 P_nP_{n+1} の長さを a_n とおく。

$$(1) a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} a_n + \boxed{\text{ハ}} \text{ が成り立つ。}$$

$$(2) r = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \text{ とする。 } a_n = r^{n-1} (a_1 + \boxed{\text{ヒ}}) + \boxed{\text{フ}} \text{ である。}$$

$$(3) \text{ 点 } P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ がこの順で四角形の頂点をなすのは } 0 < a_1 < \boxed{\text{ヘ}} \text{ のときである。}$$

$$(4) a_1 \text{ が (3) の条件をみたすとき、四角形 } P_1P_2P_3P_4 \text{ の面積が最大になるのは } a_1 = \frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}} \text{ のときである。}$$

$$(5) r = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \text{ とする。点 } P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \text{ が作る折れ線の長さは}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}} (1 - r^n) (a_1 + \boxed{\text{メ}}) + \boxed{\text{モ}} n$$

である。