

(2009年度)

7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は6ページ、4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し、机の上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は、HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1 (1) 関数 $f(x) = 8x\sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) は

$$x = \frac{\sqrt{\frac{\text{ア}}{\text{イ}}}}{\text{イ}}$$

のとき最大値 ウ をとる。

曲線 $y = f(x)$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は $\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ である。

(2) 座標平面上で、2点 $P(4, 2)$, $Q(-2\sqrt{3}, 2)$ を行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

の表す1次変換によって、それぞれ点 R , S に移動した。直線 RS の方程式が $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 4)$ であるとする、

$$a = \frac{\sqrt{\frac{\text{カ}}{\text{キ}}}}{\text{キ}}, \quad b = \frac{\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}}{\text{ケ}}$$

である。

2 3 次関数 $f(x) = ax^3 + x + 2$, $g(x) = bx^3 - 2x$ を考える。ただし, a, b は正の定数とする。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が共有点を持ち, そのうちの一つで共通の接線 l をもつとする。 l の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{コ}} a + \boxed{\text{サ}} \right) x + \boxed{\text{シ}} a + \boxed{\text{ス}}$$

である。また, $y = f(x)$ と l の接点の x 座標は $\boxed{\text{セ}}$ であり, それ以

外の交点の x 座標は $\boxed{\text{ソ}}$ である。

- (2) (1) で求めた接線 l と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる部分の面積を S_1 , l と $y = g(x)$ で囲まれる部分の面積を S_2 とすると,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a + \boxed{\text{タ}}}{a + \boxed{\text{チ}}}$$

である。

- (3) $S_2 = 3S_1$ のとき, $a = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$, $b = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

- 3 正方形 ABCD を底面, 点 O を頂点とし, すべての辺の長さが 3 である四角すい OABCD がある。辺 OC を 1 : 2 に内分する点を P とし, 辺 OB 上に点 Q を $QP \perp OC$ となるようにとる。3 点 A, P, Q を通る平面と辺 OD の交点を R とする。 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とおく。

(1) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \boxed{\text{ニ}}$ である。

(2)

$$\vec{AP} = \boxed{\text{ヌ}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \vec{c}, \quad \vec{AQ} = \boxed{\text{ハ}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} \vec{b},$$

であり,

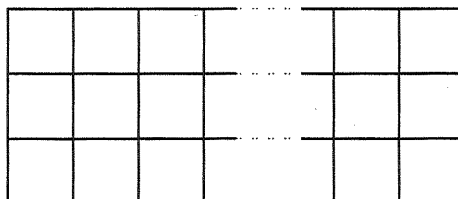
$$|\vec{AP}| = \sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}, \quad |\vec{AQ}| = \sqrt{\boxed{\text{ホ}}}$$

である。

(3) $\vec{OD} = \boxed{\text{マ}} \vec{a} + \boxed{\text{ミ}} \vec{b} + \boxed{\text{ム}} \vec{c}$ である。

(4) $\vec{OR} = \frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}} \vec{OD}$ である。

- 4 下図のように縦に 3 個, 横に n 個, 計 $3n$ 個の正方形を並べた図形がある。各正方形を赤, 青, 黄の 3 色で塗り分ける。このとき, 辺を共有する正方形は異なる色で塗ることにする。すべての塗り分け方を a_n 通り, そのうち, 右端の 3 個がすべて異なる色であるものを b_n 通り, 右端の 3 個が 2 色のみで塗られているものを c_n 通りとする。



(1) $b_1 = \boxed{\text{ヤ}}$, $c_1 = \boxed{\text{ユ}}$ である。

(2)

$$\begin{cases} b_{n+1} = \boxed{\text{ヨ}} b_n + \boxed{\text{ラ}} c_n \\ c_{n+1} = \boxed{\text{リ}} b_n + \boxed{\text{ル}} c_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ。

(3) 自然数 n に対し,

$$k a_n < a_{n+1} < (k+1) a_n$$

となる整数 k は $\boxed{\text{レ}}$ である。

(4) $m < 10 \log_{10} 2$ をみたす最大の整数 m は $\boxed{\text{ロ}}$ である。

(5) $a_n > 12000$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ワ}}$ である。