

1

(1)

(1)	ア	9	イ	40	ウ	10		
(2)	エ	5	オ	3	カ	1	キ	3
	ク	-1	ケ	3				
(3)	コ	2	サ	3	シ	5	ス	2

〔解説〕

(1)

$\frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 1$ の両辺に xy をかけると

$$4y + 9x = xy$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(y-9) = 36$$

x, y は正の整数なので $x-4, y-9$ は 36 の約数である。

$x-4 > -4, y-9 > -9$ より, $x-4, y-9$ の組み合わせは

$$(x-4, y-9) = (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6), (9, 4), (12, 3), (18, 2), (36, 1)$$

よって (x, y) の組み合わせは

$$(x, y) = (5, 45), (6, 27), (7, 19), (8, 18), (10, 15), (13, 13), (16, 12), (22, 11), (40, 10)$$

の 9 組であり, x が最大のものは $(40, 10)$

(2)

$$f(x) = (x^3 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x^2 - x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

とおく。 $f(x)$ を $x^2 - 1$ で割った余りは $2x + 3$ なので, 剰余の定理により

$$f(-1) = 2(-1) + 3 = 1$$

よって

$$f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c$$

$$= a - b + c = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

また,

$$f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)Q(x) + a(x^2 - x + 1) + ax - a + bx + c$$

$$= (x^2 - x + 1)\{(x+1)Q(x) + a\} + (a+b)x - a + c$$

と変形できる。 $f(x)$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りは $2x - 2$ なので係数を比較して,

$$a + b = 2$$

$$-a + c = -2$$

$$\dots \textcircled{2}$$

①, ②を連立させると

$$a = \frac{5}{3}, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{3}$$

したがって

$$f(x) = \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

(3)

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{9}}{2}$$

$$= \frac{4}{9}$$

$0 < 2\theta < \pi$ より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので, $\cos \theta > 0$ となる。よって,

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

いま線分 AD は $\angle A$ の二等分線なので, $BD : DC = AB : AC = 3 : 5$

そこで $AD = x, BD = 3y, DC = 5y$ とおく。 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ に余弦定理を用いて,

$$(3y)^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{9}(x^2 - 4x + 9) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(5y)^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cos \theta$$

$$y^2 = \frac{1}{25}\left(x^2 - \frac{20}{3}x + 25\right) \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④から y^2 を消去して,

$$\frac{1}{9}(x^2 - 4x + 9) = \frac{1}{25}\left(x^2 - \frac{20}{3}x + 25\right)$$

$$\Leftrightarrow x(2x - 5) = 0$$

$$x > 0 \text{ より, } AD = x = \frac{5}{2}$$

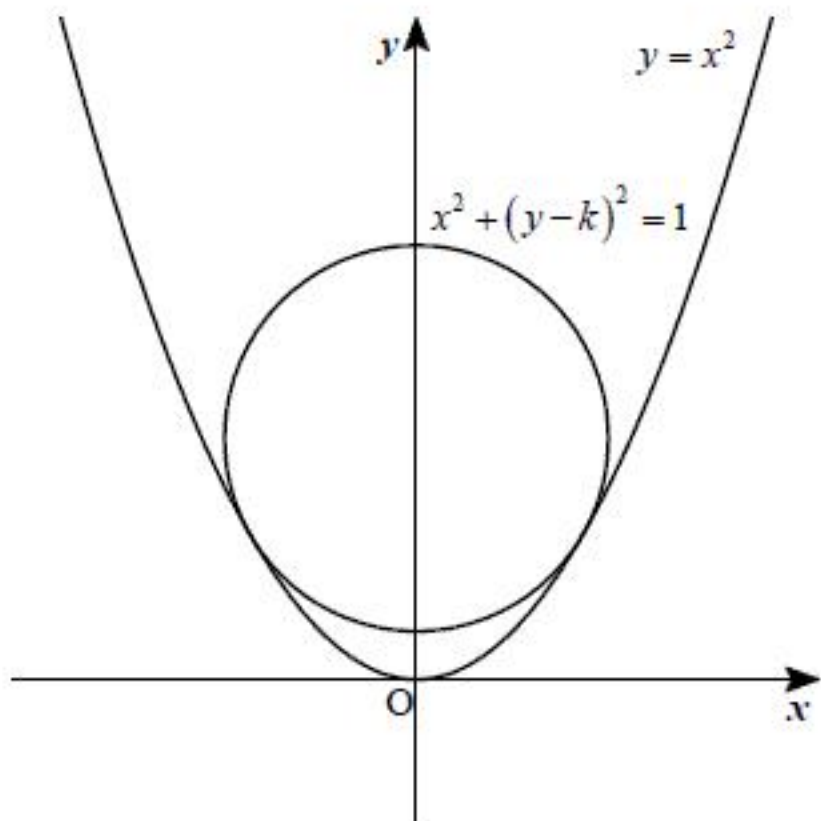
2

- (1) セ 5 ソ 4 タ 3 チ 4
- (2) ツ 3 テ -3 ト 4
- (3) ナ 3 ニ 4 ヌ 3 ネ -1
ノ 3

〔解説〕

(1)

円の中心は $(0, k)$ で $k \geq 1$ なので、放物線 $y = x^2$ と円 $x^2 + (y - k)^2 = 1$ が 2 点を共有するのは次図のように、2 曲線が接する場合である。



よって $y = x^2$, $x^2 + (y - k)^2 = 1$ から y を消去して、

$$\begin{aligned} x^2 + (x^2 - k)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^4 + (1 - 2k)x^2 + k^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 = t (> 0) \text{ おくと,} \\ t^2 + (1 - 2k)t + k^2 - 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

放物線と円が 2 点 P, Q だけを共有するとき、この 2 次方程式が $t > 0$ なる重解を持つ。

判別式を D として、

$$\begin{aligned} D &= (1 - 2k)^2 - 4(k^2 - 1) \\ &= -4k + 5 = 0 \\ k &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

これを①に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \left(t - \frac{3}{4}\right)^2 &= 0 \\ t &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

よって確かに $t > 0$ の重解を持つ。点 P, Q の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{3}{4} \\ \therefore x &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

また点 P, Q の y 座標は、

$$y = x^2 = \frac{3}{4}$$

(2)

$y = x^2$ の点 P $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ における接線を求めればよい。

$y' = 2x$ なので、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{4} \\ &= \sqrt{3}x - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(3)

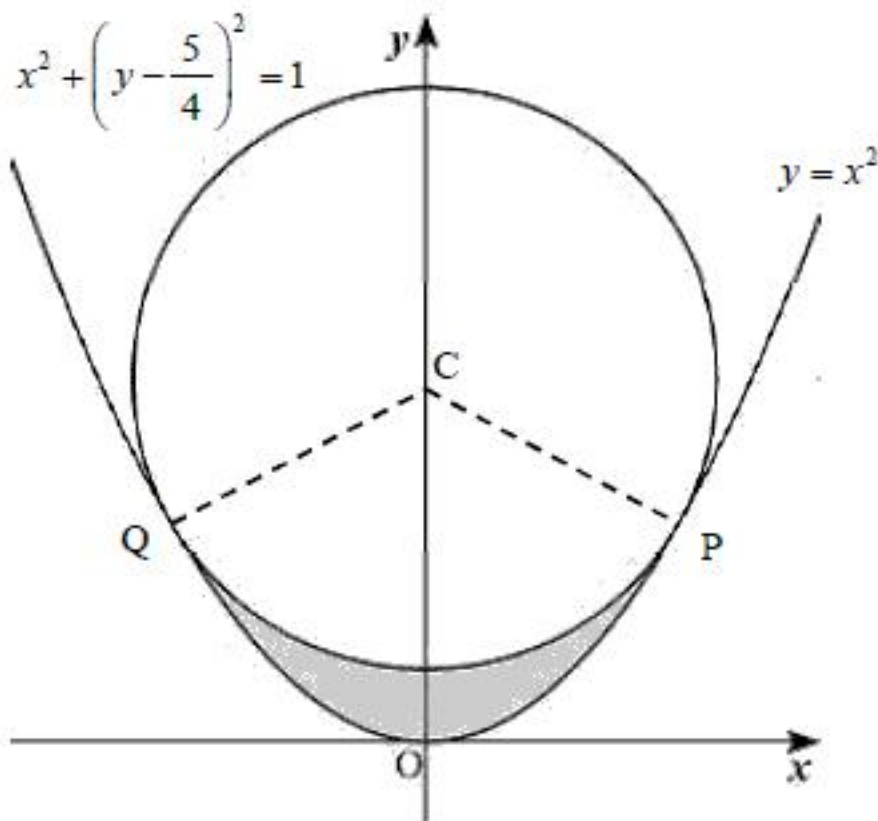
円の中心を点 C とする。このとき $\overline{CP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\overline{CQ} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ であり、

$$\begin{aligned} |\overline{CP}| &= |\overline{CQ}| = 1 \\ \overline{CP} \cdot \overline{CQ} &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \angle PCQ &= \frac{\overline{CP} \cdot \overline{CQ}}{|\overline{CP}| |\overline{CQ}|} = -\frac{1}{2} \\ \therefore \angle PCQ &= \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

求めるのは次図の斜線部である。



いま線分 CP の方程式は

$$CP: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{4}$$

線分 CP, CQ と放物線で囲まれる部分の面積を T とすると、グラフが y 軸対称であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}T &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{4} - x^2\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3}{8}\sqrt{3} \\ \therefore T &= \frac{3}{4}\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって求める面積を S とすると、 S は T から扇形 CPQ の面積を引いたものなので、

$$\begin{aligned} S &= T - 1^2 \cdot \pi \cdot \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

(1)	ハ	32	(2)	ヒ	80	(3)	フ	136
(4)	ヘ	196	(5)	ホ	258	(6)	マ	117

〔解説〕

(1)

当たりが1枚のときは賞金はもらえない。

当たりが2枚のとき、 $512 = 2^9$ 円の賞金がもらえる。

当たりが2枚出る確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2^4}$

よって求める期待値は

$$\frac{1}{2^4} \cdot 2^9 = 2^5 = 32 \text{ 円}$$

(2)

当たりが2, 3枚のとき、 2^9 円の賞金がもらえる。

当たりが2, 3枚出る確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{10}{2^6}$$

よって求める期待値は

$$\frac{10}{2^6} \cdot 2^9 = 2^3 \cdot 10 = 80 \text{ 円}$$

(3)

当たりが2, 3枚のとき、 2^9 円の賞金がもらえる。

当たりが4枚のとき、 $2 \cdot 512 = 2^{10}$ 円の賞金がもらえる。

当たりが2, 3枚出る確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + {}_4C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{66}{2^8}$$

当たりが4枚出る確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{2^8}$$

よって求める確率は

$$\frac{66}{2^8} \cdot 2^9 + \frac{1}{2^8} \cdot 2^{10} = 136 \text{ 円}$$

(4)

当たりが2, 3枚のとき、 2^9 円の賞金がもらえる。

当たりが4, 5枚のとき、 2^{10} 円の賞金がもらえる。

当たりが2, 3枚出る確率は

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + {}_5C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{360}{2^{10}}$$

当たりが4, 5枚出る確率は

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{16}{2^{10}}$$

よって求める期待値は $\frac{360}{2^{10}} \cdot 2^9 + \frac{16}{2^{10}} \cdot 2^{10} = 196 \text{ 円}$

(5)

当たりが2, 3枚のとき、 2^9 円の賞金がもらえる。

当たりが4, 5枚のとき、 2^{10} 円の賞金がもらえる。

当たりが6枚のとき、 $3 \cdot 512 = 3 \cdot 2^9$ 円の賞金がもらえる。

当たりが2, 3枚出る確率は

$${}_6C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^4 + {}_6C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1755}{2^{12}}$$

当たりが4, 5枚出る確率は

$${}_6C_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + {}_6C_5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{153}{2^{12}}$$

当たりが6枚出る確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{1}{2^{12}}$$

よって求める期待値は

$$\frac{1755}{2^{12}} \cdot 2^9 + \frac{153}{2^{12}} \cdot 2^{10} + \frac{1}{2^{12}} \cdot 3 \cdot 2^9 = 258 \text{ 円}$$

(6)

サイコロを振って出た目の数だけくじを引くとき、(1)~(5)で求めた期待値の分だけ賞金がもらえると考えればよい。なお1の目が出たときは賞金はもらえない。

サイコロのそれぞれの目の出方は同様に確からしいので、求める期待値は

$$\frac{1}{6} (32 + 80 + 136 + 196 + 258) = 117 \text{ 円}$$

である。