

1

(1) (i) (e) (ii) (z) (iii) (b)

(2) ア 1 イ 6

(3) ウ 2 エ 5

【解説】

(1)

(i)

- (a)…反例：6未満の数字が書かれている直径5cm未満の赤い球
- (b)…反例：6以上の数字が書かれている直径5cm以上の赤い球
- (c)…反例：6以上の数字が書かれている直径5cm以上の赤い球
- (d)…反例：6以上の数字が書かれている直径5cm未満の赤い球
- (e)…(P)より直径5cm以上の赤い球が存在し、(Q)より直径5cm以上の球は全て6以上の数字が書いてあるので、これは結論として得られる。
- (f)…6以上の数字が書かれている直径5cm未満の球が存在しなくても、(P)、(Q)には矛盾しない。

(ii)

- (a)…反例：6未満の数字が書かれている直径5cm以上の赤い球
- (b)…反例：6以上の数字が書かれている直径5cm以上の赤い球
- (c)…反例：6以上の数字が書かれている直径5cm以上の赤い球
- (d)…反例：6以上の数字が書かれている直径5cm以上の赤くない球
- (e)…6以上の数字が書かれている赤い球が存在しなくても、(P)、(Q)には矛盾しない。
- (f)…6以上の数字が書かれている直径5cm未満の球が存在しなくても、(P)、(Q)には矛盾しない。

(iii)

- (a)…反例：6未満の数字が書かれている直径5cm未満の赤い球
- (b)…(P)より、
『赤い球⇒直径5cm未満』 … ①
- (Q)より、
『数字が6以上⇒直径が5cm以上』 … ②
- ②の対偶から、
『直径が5cm未満⇒数字が6未満』 … ③
- よって、①と③を合わせて
『赤い球⇒数字が6未満』 … ④
- となって、これは結論として得られる。
- (c)…反例：6以上の数字が書かれている直径5cm以上の赤くない球
- (d)…反例：6以上の数字が書かれている直径5cm以上の赤くない球
- (e)…これは④に矛盾するので、不適である。
- (f)…これは②に矛盾するので、不適である。

(2)

$2^x+2^{-x}=t$ … ①

とおく。このとき $2^x>0, 2^{-x}>0$ なので、相加相乗平均の関係から

$t=2^x+2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$

が成立する。等号は $2^x=2^{-x} \Leftrightarrow x=0$ のとき成立する。

また①の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} \left(2^x+2^{-x}\right)^2 &=t^2 \\ \Leftrightarrow 4^x+4^{-x} &=t^2-2 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_2 \left\{ 4\left(t^2-2\right)-20t+97 \right\} \\ &= \log_2 \left(4t^2-20t+89 \right) \end{aligned}$$

ここで $g(t)=4t^2-20t+89$ とおけば、

$$g(t)=4\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+64$$

(これより $g(t)>0$ なので、真数条件は常に満たされる)

$f(x)$ は $g(t)$ の単調増加関数なので、 $g(t)$ が最小のとき $f(x)$ も最小となる。 $t \geq 2$ に注意す

れば、 $f(x)$ は $t=\frac{5}{2}$ で最小値

$f(x)=\log_2 64=6$

をとる。このとき、 $2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$ であるが、 $2^x=s$ とおけば、

$$\begin{aligned} s+\frac{1}{s} &= \frac{5}{2} \\ (2s-1)(s-2) &= 0 \\ \therefore s &= \frac{1}{2}, 2 \end{aligned}$$

ここで、 $s=\frac{1}{2}$ のとき $x=-1$ 、 $s=2$ のとき $x=1$ となるが、 $x \geq 0$ なので、求める x は

$x=1$

(3)

与えられた方程式について、三角関数の加法定理を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin x+\sin 4x)+(\sin 2x+\sin 3x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{\sin \left(\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}x\right)+\sin \left(\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}x\right)\right\}+\left\{\sin \left(\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}x\right)+\sin \left(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}x\right)\right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin \left(\frac{5}{2}x\right)\cos \left(\frac{3}{2}x\right)+2\sin \left(\frac{5}{2}x\right)\cos \left(\frac{1}{2}x\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin \left(\frac{5}{2}x\right)\left\{\cos \left(\frac{3}{2}x\right)+\cos \left(\frac{1}{2}x\right)\right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin \left(\frac{5}{2}x\right)\left\{\cos \left(x+\frac{x}{2}\right)+\cos \left(x-\frac{x}{2}\right)\right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\sin \left(\frac{5}{2}x\right)\cos x\cos \left(\frac{x}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0< x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos x \neq 0, \cos \left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ であるから、求める x の値は

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{5}{2}x\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}x &= \pi \\ \therefore x &= \frac{2}{5}\pi \end{aligned}$$

となる。

2

- (1) オ 8 カ 3 キ -1 ク 3 ケ 2
 コ 3 サ 5
- (2) シ 10 ス 3 セ 1 ソ 2 タ -5
 チ 3 ツ 5 テ 3
- (3) ト -1 ナ 1 ニ 4 ヌ -5

【解説】

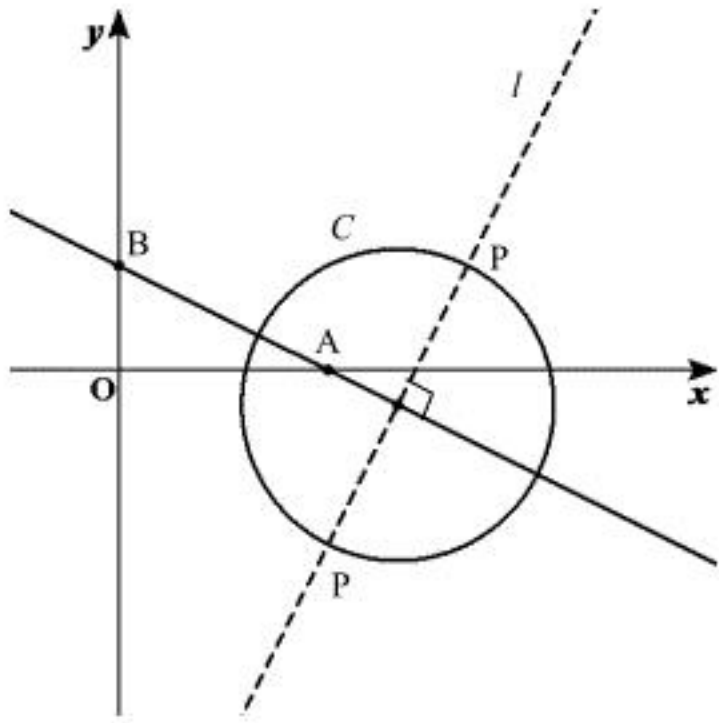
(1) 2AP=BP の両辺を 2 乗すると、
 4AP² = BP²
いま、
 AP² = (x-2)² + y²
 BP² = x² + (y-1)²

なので、
 4{(x-2)² + y²} = x² + (y-1)²
 ∴ (x-⁸/₃)² + (y+¹/₃)² = ²⁰/₉

よって点 P は中心(⁸/₃, -¹/₃)、半径√²⁰/₉ = ²/₃√5 の円周上にある。

(2) AB の長さは
 √{(2-0)² + (0-1)²} = √5
で一定なので、△ABP の面積は点 P の位置によって変化する。よって辺 AB を底辺としたときの高さが最大になるように点 P の座標を決めればよい。いま、直線 AB の方程式は
 y = -¹/₂x + 1

であるが、これは円 C の中心を通る。よって下の図より、円 C の中心を通り直線 AB に垂直な直線(*l* とする)と円 C の交点を P としたときに、高さは最大になる。



直線 AB は傾き -¹/₂ なので、*l* の方程式は

$$y = 2\left(x - \frac{8}{3}\right) - \frac{1}{3}$$
$$= 2x - \frac{17}{3}$$

となる。よってこれと円 C の方程式から *y* を消去して整理すると、

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$
$$x = \frac{8}{3} \pm \frac{2}{3} = \frac{10}{3}, 2$$

x = ¹⁰/₃ のとき、*y* = 2・¹⁰/₃ - ¹⁷/₃ = 1 となる。

x = 2 のとき、*y* = 2・2 - ¹⁷/₃ = -⁵/₃ となる。

よって点 P が(¹⁰/₃, 1)、(2, -⁵/₃)にあるとき面積は最大になる。このとき辺 AB を底辺とした

場合の高さは円 C の半径に等しく ²/₃√5 なので、求める面積の最大値は

$$\sqrt{5} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{3}$$

(3) 円 C の式に *x* = 4 を代入すると、
 (4 - ⁸/₃)² + (y + ¹/₃)² = ²⁰/₉
 ∴ *y* = ¹/₃, -1

題意の点は *y* 座標が負なので、点 (4, -1) で円 C に接する放物線を考えれば良い。
その放物線を *y* = *a**x*² + *b* (*a* ≠ 0) とおくと、この放物線は点 (4, -1) を通るので

$$-1 = a \cdot 4^2 + b$$
$$\Leftrightarrow 16a + b = -1 \qquad \cdots \text{①}$$

ここで、円 C に点 (4, -1) で接する接線の方程式は

$$\left(4 - \frac{8}{3}\right)\left(x - \frac{8}{3}\right) + \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right) = \frac{20}{9}$$
$$\therefore y = 2x - 9$$

これが放物線 *y* = *a**x*² + *b* とも接するので、

$$ax^2 + b = 2x - 9$$
$$\Leftrightarrow ax^2 - 2x + b + 9 = 0$$

が重解を持つ。よってこの 2 次方程式の判別式を *D* として、

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - a(b + 9) = 0$$
$$\Leftrightarrow ab + 9a - 1 = 0 \qquad \cdots \text{②}$$

①、②から *b* を消去すると、

$$(4a - 1)^2 = 0$$
$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

このとき、

$$b = -5$$

よって求める放物線の方程式は

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 5$$

となる。

3

- (1) ネ 6 ノ 27 ハ 4
- (2) ヒ 20 フ 5 ヘ 10 ホ 4 マ 50
 ミ 4

【解説】

- (1)
- 大きい方の数が1になることはない。カードを2枚引いて大きい方の数が k ($2 \leq k \leq 8$)となるのは、引いたカードのうち1枚が k 、もう1枚が1から $k-1$ のカードのどれかであるときなので、その確率は

$$\frac{k-1}{{}_8C_2} = \frac{k-1}{28}$$

よって期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^8 k \cdot \frac{k-1}{28} &= \frac{1}{28} \sum_{k=1}^8 (k^2 - k) \\ &= \frac{1}{28} \left(\frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} - \frac{8 \cdot 9}{2} \right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

次に3枚カードを引くとき、最大の数が1,2となることはない。3枚カードを引いて最大の数が l ($3 \leq l \leq 8$)となるのは、引いたカードのうち1枚が k 、もう2枚が1から $k-1$ のカードのうち2枚なので、その確率は

$$\frac{{}_{l-1}C_2}{{}_8C_3} = \frac{(l-1)(l-2)}{112}$$

よって期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{l=3}^8 l \cdot \frac{(l-1)(l-2)}{112} &= \frac{1}{112} \sum_{l=1}^8 (l^3 - 3l^2 + 2l) \\ &= \frac{1}{112} \left(\frac{8^2 \cdot 9^2}{4} - 3 \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} + 2 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} \right) \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

- (2)
- 6人のカードの出し方は 3^6 通りである。
- (i)
- どの色で組ができるかで ${}_3C_2 = 3$ 通り考えられる。
- その各々について、組の作り方が ${}_6C_3 = 20$ 通り考えられる。よって求める確率は

$$\frac{3 \cdot 20}{3^6} = \frac{20}{3^5}$$

- (ii)
- 全ての色の組ができるので、色の組み合わせは1通り考えられる。
- その各々について、組の作り方が ${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = 90$ 通り考えられる。よって求める確率は

$$\frac{90}{3^6} = \frac{10}{3^4}$$

- (iii)
- 2人の組が1組だけできるのは、例えば次のような場合である。
- [1](青青赤赤赤赤) [2](青青赤赤赤黄)
- [1]の場合
- これは2人の組と4人の組が1つずつできる場合である。
- このとき、どの色が何人の組を作るかで ${}_3P_2 = 6$ 通り考えられる。
- その各々について、組の作り方が ${}_6C_2 = 15$ 通り考えられる。
- よって[1]のようになる確率は、

$$\frac{6 \cdot 15}{3^6} = \frac{10}{3^4}$$

- [2]の場合
- これは2人の組と3人の組が1つずつできる場合である。
- このとき、どの色が何人の組を作るかで ${}_3P_3 = 6$ 通り考えられる。
- その各々について、組の作り方が ${}_6C_2 \cdot {}_4C_3 = 60$ 通り考えられる。
- よって[2]のようになる確率は、

$$\frac{6 \cdot 60}{3^6} = \frac{40}{3^4}$$

以上[1], [2]から、求める確率は

$$\frac{10}{3^4} + \frac{40}{3^4} = \frac{50}{3^4}$$

である。