

1

- (1)

あ	b	い	c	う	a
え	B	ア	1	イ	1

ウ	1	エ	3	オ	3
---	---	---	---	---	---

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} &= \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{8} < \log_2 3 = a && \left(\because (\sqrt{8})^2 < 3^2 \right) \\ \frac{4}{3} &= \log_3 3^{\frac{4}{3}} = \log_3 \sqrt[3]{81} > \log_3 4 = b && \left(\because (\sqrt[3]{81})^3 > 4^3 \right)\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}4.21\dots &= \frac{1024}{243} < 6 < \frac{243}{32} = 7.59\dots \\ \left(\frac{4}{3}\right)^5 &< 6 < \left(\frac{3}{2}\right)^5 \\ \frac{4}{3} &< \sqrt[5]{6} < \frac{3}{2} \\ \therefore \frac{4}{3} &< c < \frac{3}{2}\end{aligned}$$

である。以上から

$$b < \frac{4}{3} < c < \frac{3}{2} < a$$

となる。

(2)

[1] $0 \leq x < \frac{1}{C}$ のとき

$$\begin{aligned}f(x) &= -(Ax-1) - (Bx-1) - (Cx-1) \\ &= (-A-B-C)x+3\end{aligned}$$

[2] $\frac{1}{C} \leq x < \frac{1}{B}$ のとき

$$\begin{aligned}f(x) &= -(Ax-1) - (Bx-1) + (Cx-1) \\ &= (-A-B+C)x+1\end{aligned}$$

[3] $\frac{1}{B} \leq x < \frac{1}{A}$ のとき

$$\begin{aligned}f(x) &= -(Ax-1) + (Bx-1) + (Cx-1) \\ &= (-A+B+C)x-1\end{aligned}$$

[4] $\frac{1}{A} \leq x \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}f(x) &= (Ax-1) + (Bx-1) + (Cx-1) \\ &= (A+B+C)x-3\end{aligned}$$

となる。

(i) $C < A+B$ のとき

x の係数は

$$\begin{aligned}-A-B-C &< 0 && (0 \leq x < \frac{1}{C} \text{ のとき}) \\ -A-B+C &< 0 && (\frac{1}{C} \leq x < \frac{1}{B} \text{ のとき}) \\ -A+B+C &> 0 && (\frac{1}{B} \leq x < \frac{1}{A} \text{ のとき}) \\ A+B+C &> 0 && (\frac{1}{A} \leq x \leq 1 \text{ のとき})\end{aligned}$$

であるから、増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{C}$	...	$\frac{1}{B}$	...	$\frac{1}{A}$	...	1
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

したがって $f(x)$ は $x = \frac{1}{B}$ で最小値をとる。

(ii) $f(x)$ の最小値が 1 のとき

[1] $C < A+B$ のとき、

$f(x)$ は $x = \frac{1}{B}$ で最小値

$$f\left(\frac{1}{B}\right) = 1 - \frac{1}{B}(A+B-C)$$

をとる。これが 1 であるとき、

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{B}(A+B-C) &= 1 \\ \therefore C &= A+B\end{aligned}$$

となるが、これは $C < A+B$ より不適である。

[2] $C \geq A+B$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} \leq x < \frac{1}{B} \text{ のとき} &\text{のとき} \text{の} x \text{ の係数は} \\ -A-B+C &\geq 0\end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{C}$ で最小値

$$f\left(\frac{1}{C}\right) = 1 - \frac{1}{C}(A+B-C)$$

をとる。これが 1 であるとき、

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{C}(A+B-C) &= 1 \\ \therefore C &= A+B\end{aligned}$$

これは $C \geq A+B$ に適する。

以上[1],[2]より、 $f(x)$ の最小値が 1 のとき

$$C = A+B$$

である。

(iii) $f(x)$ の最小値が 1、最大値が 5 のとき

(ii)より

$$C = A+B \tag{1}$$

となる。ここで、 $f(x)$ の最大値の候補は

$$f(0) = 3$$

$$f(1) = A+B+C-3$$

の 2 つであるが、前者は 5 になり得ないので不適である。したがって後者が最大値となり、その値が 5 であるから、

$$A+B+C-3 = 5$$

となる。①を代入して、

$$A+B+(A+B)-3 = 5$$

$$\therefore A+B = 4$$

ここで A, B は $1 \leq A < B$ をみたす整数なので

$$A=1, B=2$$

となる。

(iv) $f(x)$ の最大値が 3 のとき

$$f(1) \leq 3$$

であることが $f(x)$ の最大値が 3 であることの必要十分条件なので、

$$A+B+C-3 \leq 3$$

$$\therefore A+B+C \leq 6$$

ここで A, B, C は $1 \leq A < B < C$ を満たす整数なので

$$A=1, B=2, C=3$$

となる。

- (1) $\boxed{\text{カ}}$ 51
 (2) $\boxed{\text{キ}}$ 28 $\boxed{\text{ク}}$ 31
 (3) $\boxed{\text{ケ}}$ 8 $\boxed{\text{コ}}$ 5 $\boxed{\text{サ}}$ 9
 (4) $\boxed{\text{シ}}$ 7 $\boxed{\text{ス}}$ 59

〔解説〕

(1)

A 大学, B 大学, C 大学に出願した生徒の集合を, それぞれ A, B, C とし, 集合 X の要素の個数を $n(X)$ で表すことにすると,

$$\begin{aligned} n(A) + n(B) &= n(A \cup B) + n(A \cap B) \\ &= 43 + 8 \\ &= 51 \end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)より

$$n(A) + n(B) = 51$$

であり, これと同様にして

$$\begin{aligned} n(B) + n(C) &= n(B \cup C) + n(B \cap C) = 54 \\ n(C) + n(A) &= n(C \cup A) + n(C \cap A) = 59 \end{aligned}$$

となる。これらを連立して解くと

$$\begin{aligned} n(A) &= 28 \\ n(B) &= 23 \\ n(C) &= 31 \end{aligned}$$

である。

(3)

条件から

$$\begin{aligned} a - d &= n(A) - n(A \cup B) - n(A \cup C) \\ &= 28 - 8 - 12 \\ &= 8 \end{aligned}$$

である。同様にして

$$\begin{aligned} b - d &= 23 - 8 - 10 = 5 \\ c - d &= 31 - 10 - 12 = 9 \end{aligned}$$

となる。

(4)

1 校だけに出願した生徒の人数は 43 人であるから

$$a + b + c = 43$$

となる。(3)で得られた 3 つの式の辺々を加えると

$$\begin{aligned} a + b + c - 3d &= 22 \\ 43 - 3d &= 22 \\ \therefore d &= 7 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} a &= 8 + d = 15 \\ b &= 5 + d = 12 \\ c &= 9 + d = 16 \end{aligned}$$

となる。したがって, 少なくとも 1 校に出願した生徒の数は

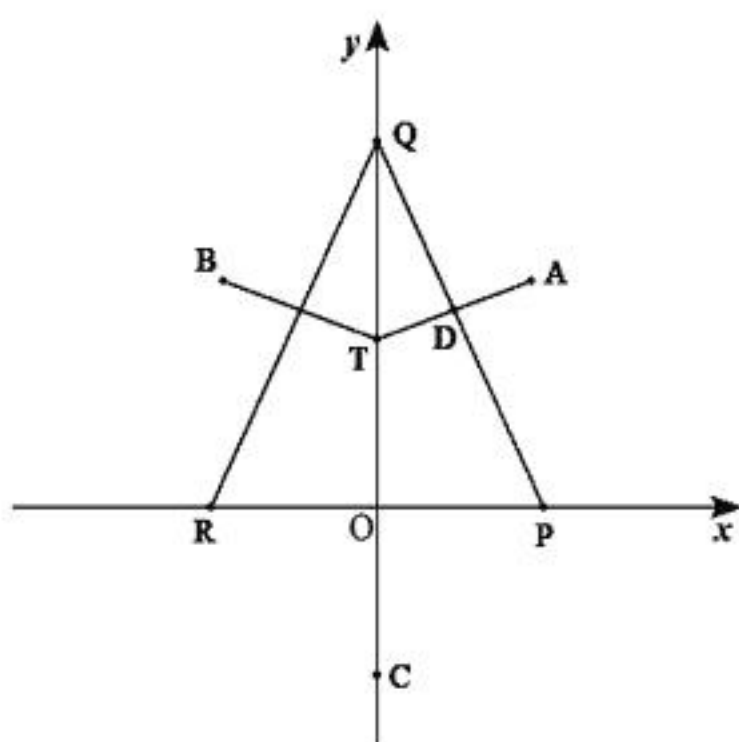
$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= a + b + c + n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 2d \\ &= 15 + 12 + 16 + 8 + 12 + 10 - 14 \\ &= 59 \end{aligned}$$

である。

- (1) セ -2 ソ 2 タ 1 チ 1 ツ -1 テ 2
 ト 1
 (2) ナ 4 ニ 1 ヌ -1 ネ 1 ノ -1
 (3) ハ -1 ヒ 2

【解説】

(1)



線分 PQ と線分 TA の交点を点 D とおく。点 D は線分 PQ 上にあるので, s を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TD} &= s\overrightarrow{TP} + (1-s)\overrightarrow{TQ} \\ &= s(1, -t) + (1-s)(0, a-t) \\ &= (s, (1-s)a-t)\end{aligned}$$

とおける。さらに

$$\overrightarrow{TD} \perp \overrightarrow{QP}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TD} \cdot \overrightarrow{QP} &= 0 \\ (s, (1-s)a-t) \cdot (1, -a) &= 0 \\ s - (1-s)a^2 + at &= 0 \\ \therefore s &= \frac{-at + a^2}{a^2 + 1}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TD} &= (s, (1-s)a-t) \\ &= \left(\frac{-at + a^2}{a^2 + 1}, \frac{a-t}{a^2 + 1} \right)\end{aligned}$$

である。ここで、点 D は線分 TA の中点なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TA} \\ &= \overrightarrow{OT} + 2\overrightarrow{TD} \\ &= (0, t) + 2\left(\frac{-at + a^2}{a^2 + 1}, \frac{a-t}{a^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{-2at + 2a^2}{a^2 + 1}, \frac{(a^2 - 1)t + 2a}{a^2 + 1} \right)\end{aligned}$$

となるから

$$x = \frac{-2at + 2a^2}{a^2 + 1}, y = \frac{(a^2 - 1)t + 2a}{a^2 + 1}$$

が得られる。

(2)

図形の対称性から、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times 2x \times (y+t) &= x(y+t) \\ &= \frac{-2at + 2a^2}{a^2 + 1} \left(\frac{(a^2 - 1)t + 2a}{a^2 + 1} + t \right) \\ &= \frac{4a^2}{a^2 + 1} (-at^2 + at^3 - t + a)\end{aligned}$$

となる。

(3)

$\triangle PQR$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times 2 \times a = a$$

となり、これが $\triangle ABC$ の面積と等しいので

$$\begin{aligned}\frac{4a^2}{a^2 + 1} (-at^2 + at^3 - t + a) &= a \\ 4a^2t^3 - 4a(a^2 - 1)t + (a^2 - 1)^2 &= 0 \\ \{2at - (a^2 - 1)\}^2 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{a^2 - 1}{2a}\end{aligned}$$

である。