

1

(1)	ア	−6	イ	1	ウ	3
(2)	エ	72	オ	32		
(3)	カ	−3	キ	−1	ク	3
	サ	3	シ	−2	ケ	6
					コ	−4

【解説】

(1)

直線と放物線の関係は、

- 異なる2点で交わる ... ①
- 1点で交わる(接する) ... ②
- 交わらない ... ③

の3つが考えられるが、 l は C_1 上の点Aを通るので、③はあり得ない。よって②でないとき、 l と C_1 は2点で交わる。 C_1 において

$$y' = 2x$$

であるから、点Aを通る接線の傾きは

$$2 \cdot (-3) = -6$$

である。したがって

$$k \neq -6$$

のとき、 l と C_1 は2点で交わる。このとき、

$$l: y = k(x+3) + 6$$

と書けるので、これと

$$C_1: y = x^2 - 3$$

から y を消去して、

$$x^2 - 3 = k(x+3) + 6$$

$$x^2 - kx - 3k - 9 = 0$$

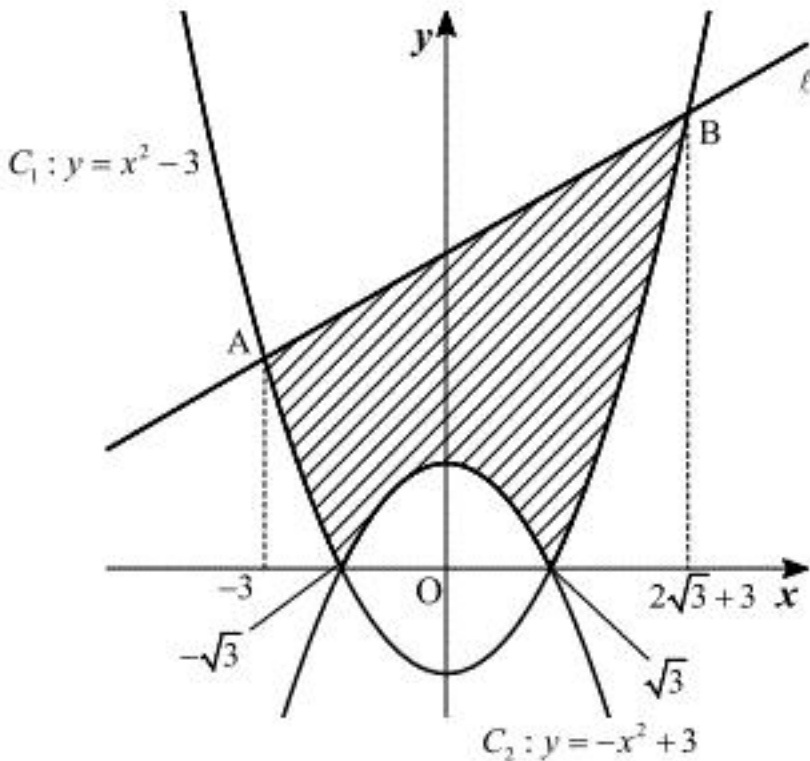
$$(x+3)(x-k-3) = 0$$

$$\therefore x = -3, k+3$$

したがってBの x 座標は $k+3$ である。

(2)

図は次のようになる。



$k = 2\sqrt{3}$ を l の式に代入して、

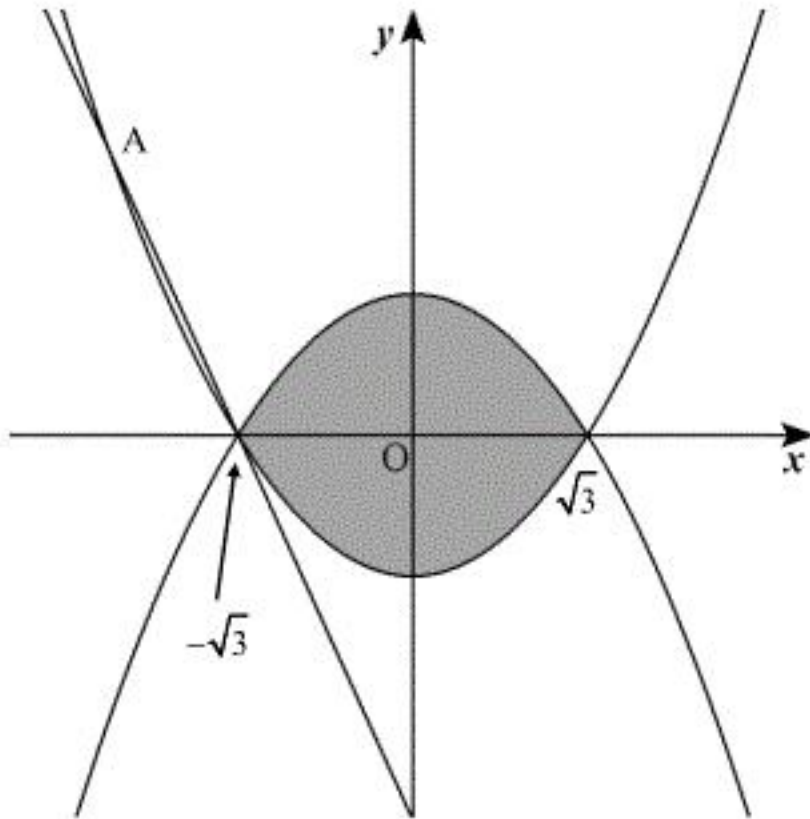
$$l: y = 2\sqrt{3}(x+3) + 6 = 2\sqrt{3}x + 6\sqrt{3} + 6$$

となるので、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{2\sqrt{3}+3} \{2\sqrt{3}x + 6\sqrt{3} + 6 - (x^2 - 3)\} dx - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \{(-x^2 + 3) - (x^2 - 3)\} dx \\ &= \int_{-3}^{2\sqrt{3}+3} -(x+3)(x-2\sqrt{3}-3) dx + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) dx \\ &= \frac{1}{6} \{2\sqrt{3}+3-(-3)\}^3 - \frac{2}{6} \{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\}^3 \\ &= 72 + 32\sqrt{3} \end{aligned}$$

(3)

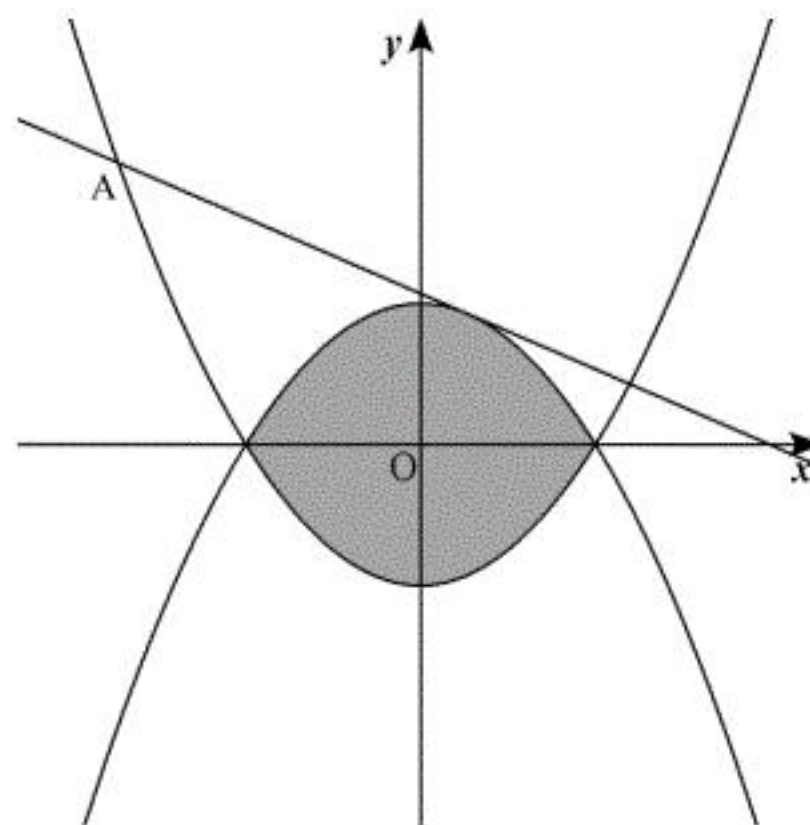
l が D を2つに分割するような任意の k よりも小さく、且つそのような k の中で最大のものは、次の図のようなときである。



つまり、 l が $(-\sqrt{3}, 0)$ を通るようなときであるから、このとき k は

$$k = \frac{6-0}{-3-(-\sqrt{3})} = -3-\sqrt{3}$$

となる。次に、 l が D を2つに分割するような任意の k よりも大きく、且つそのような k の中で最小のものは、次の図のようなときである。



つまり、 l が C_2 と $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ の範囲で接するようなときであるから、 l と C_2 を連立すると、

$$k(x+3) + 6 = -x^2 + 3$$

$$x^2 + kx + 3k + 3 = 0$$

と変形できるので。この二次方程式の判別式 $D = 0$ となるときであり、それは

$$(-k)^2 - 4(3k+3) = 0$$

$$k^2 - 12k - 12 = 0$$

$$\therefore k = 6 \pm 4\sqrt{3}$$

であるから、図より傾きの小さい $k = 6 - 4\sqrt{3}$ である。次に l が D の面積を2等分するときのことを考える。 C_1, C_2 は共に y 軸に関して対称であり、また C_1, C_2 は互いに x 軸に関して対称であるため、 D はその定義から、原点に関して対称である。したがって D の面積を2等分する直線は原点を通る。したがって、このとき k は、

$$k = \frac{6-0}{-3-0} = -2$$

となる。

【2】

(1)	ス	-1	セ	3	ソ	3
(2)	タ	9	チ	2	ツ	2
(3)	テ	1	ト	1	ナ	-1
(4)	ニ	3	ヌ	-1	ネ	-1

【解説】

以下、
 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}, \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{h}$
と表記することにする。

(1)

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{aligned} \left|\vec{a}\right| &= \sqrt{2^2+2^2+1^1}=3 \\ \left|\vec{b}\right| &= \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-5)^1}=3\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} \\ &= \frac{2\cdot(-1)+2\cdot(-1)+1\cdot(-5)}{3\cdot3\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

(2)

$0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ で考えているので、 $\sin\theta\geq0$ である。よって

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

となるから、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\theta \\ &= \frac{9}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-6\end{pmatrix}$$

であるから、 k を実数として、

$$\vec{h}=\vec{a}+k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2-3k\\2-3k\\1-6k\end{pmatrix}$$

と表せる。 $\vec{h}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より、

$$\begin{aligned} \vec{h}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= 0 \\ \begin{pmatrix}2-3k\\2-3k\\1-6k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\-6\end{pmatrix} &= 0 \\ (2-3k)\cdot(-3)+(2-3k)\cdot(-3)+(1-6k)\cdot(-6) &= 0 \\ \therefore k &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

したがって

$$\vec{h}=\begin{pmatrix}2-3\cdot\frac{1}{3}\\2-3\cdot\frac{1}{3}\\1-6\cdot\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

となる。

(4)

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\vec{h}-\vec{c}=\begin{pmatrix}1-x\\1-y\\-1-z\end{pmatrix}$$

と表せる。 $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= 0 \\ \begin{pmatrix}1-x\\1-y\\-1-z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\-6\end{pmatrix} &= 0 \\ (1-x)\cdot(-3)+(1-y)\cdot(-3)+(-1-z)\cdot(-6) &= 0 \\ \therefore x+y+2z &= 0 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{h}$ より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{h} &= 0 \\ \begin{pmatrix}1-x\\1-y\\-1-z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} &= 0 \\ (1-x)\cdot1+(1-y)\cdot1+(-1-z)\cdot(-1) &= 0 \\ \therefore x+y-z &= 3 \quad \cdots \text{②} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{h}$ より面 $\mathrm{OAB}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから、四面体 OABC の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\cdot S\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right| &= \frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{2}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right| \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right| \end{aligned}$$

これが6であるから、

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2}}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right| &= 6 \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right| &= 2\sqrt{2} \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2 &= 8 \\ \therefore (1-x)^2+(1-y)^2+(-1-z)^2 &= 8 \quad \cdots \text{③} \end{aligned}$$

以上①、②、③を連立して解けばよい。①-②より

$$\begin{aligned} 3z &= -3 \\ \therefore z &= -1 \end{aligned}$$

を得る。これを①に代入して

$$\begin{aligned} x+y-2 &= 0 \\ \therefore y &= -x+2 \end{aligned}$$

これらを③に代入して、

$$\begin{aligned} (1-x)^2+\{1-(-x+2)\}^2+\{-1-(-1)\}^2 &= 8 \\ 2(x-1)^2 &= 8 \\ \therefore x &= 1\pm2=-1, 3 \end{aligned}$$

$x>0$ であるから、

$$x=3$$

このとき、

$$y=-3+2=-1$$

以上より、

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

である。

3

(1)	ノ	2	ハ	21				
(2)	ヒ	2	フ	7				
(3)	ヘ	1	ホ	42				
(4)	マ	7	ミ	9	ム	25	メ	63

【解説】

(1) 3 つマスが揃うような組み合わせは、縦で 3 通り、横で 3 通り、ななめで 2 通りあるので、全部で

$$3+3+2=8 \text{ 通り}$$

である。3 回の操作で終了する確率は、取り出すカードの組み合わせが 3 つマスが揃うような組み合わせであればよいので、

$$\frac{8}{{}_9C_3}=\frac{2}{21}$$

である。

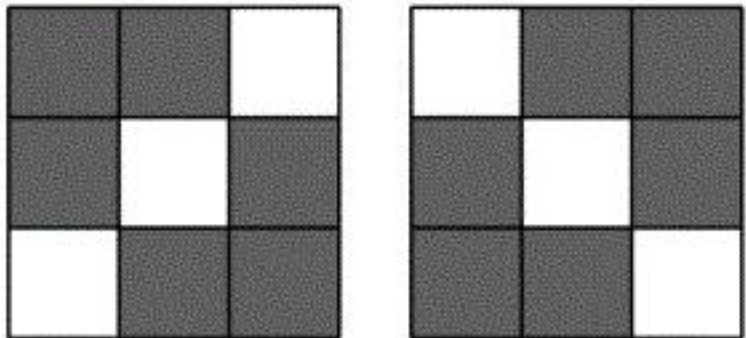
(2) (1) で考え並びに加えて残り 6 個のマスのうち 1 つ選ぶ(これを A とする)。その取り方を考えると、並びの 3 つのマスのうち 1 つが最後にきて、2 つと A が最初の 3 個になればよいから ${}_6C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot 3! \cdot 8 = 864$ 通り

存在する。したがって、4 回の操作で終了する確率は、

$$\frac{864}{{}_9P_4}=\frac{2}{7}$$

である。

(3) 6 回の操作が終了した時点でまだ 3 マス揃っていない状態は、以下の 2 通りしか考えられない。



このような状態から次の操作で終了する取り出し方はいずれも 3 通り考えられる。したがって、7 回の操作で終了する確率は

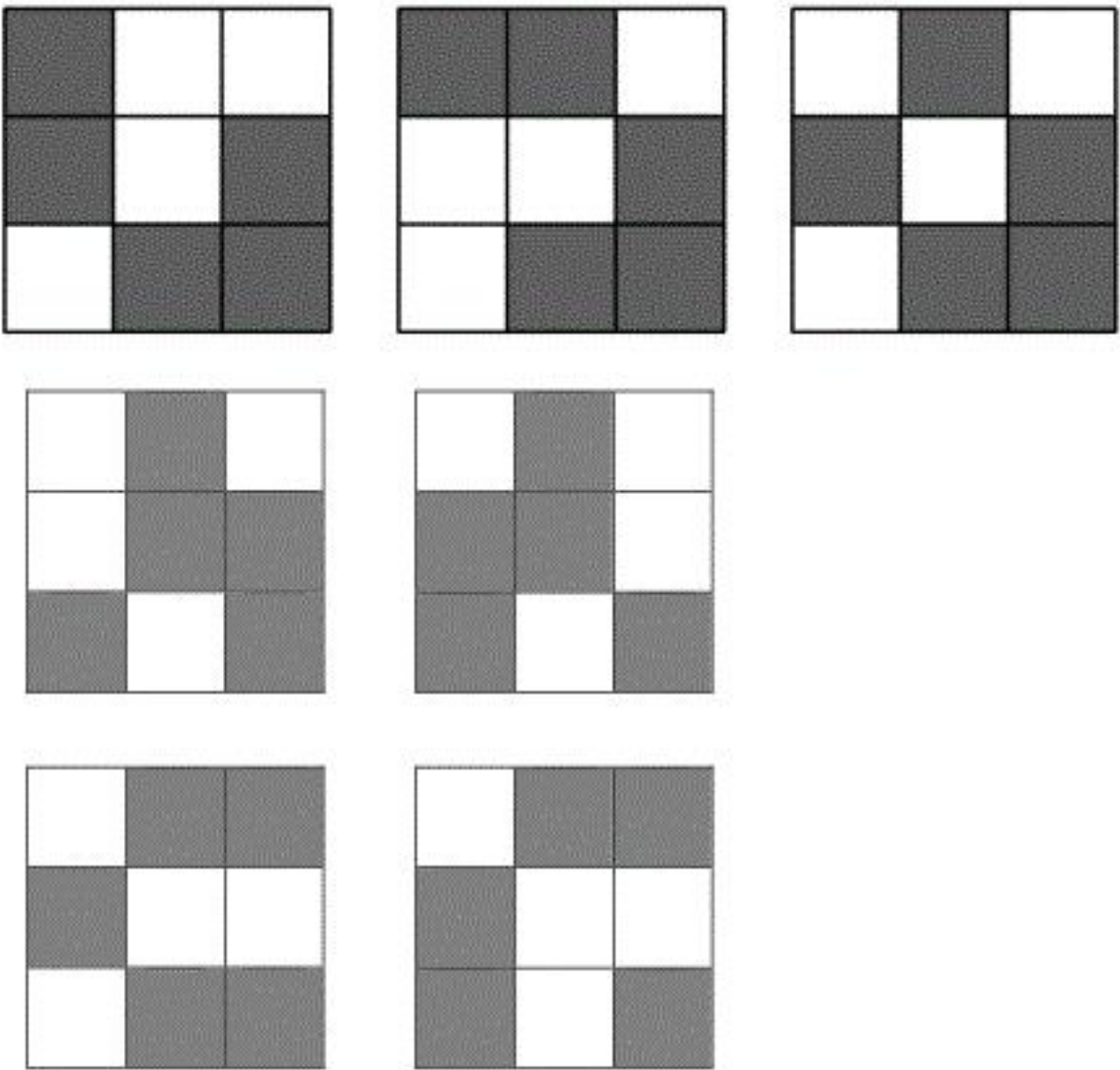
$$\frac{{}_6P_6 \cdot 2 \cdot 3}{{}_9P_7}=\frac{1}{42}$$

である。

(4) 5 回の操作が終了した時点でまだ 3 マス揃っていない状態は、以下の 7 通りと、それぞれを 90°, 180°, 270° 右回転させた状態で、合わせて

$$7 \times 4 = 28 \text{ 通り}$$

考えられる。



したがって、5 回の操作が終了した時点でまだ 3 マス揃っていない確率は

$$\frac{{}_5P_5 \cdot 28}{{}_9P_5}=\frac{2}{9}$$

である。よって 5 回以下の操作で終了する確率は、

$$1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

である。1 回または 2 回の操作で終了することはあり得ないので、5 回の操作で終了する確率は、

$$\frac{7}{9}-\frac{2}{21}-\frac{2}{7}=\frac{25}{63}$$

である。