

(2010年度)

7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は6ページ, 4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机の上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき, 枠からはみ出したり, 枠のなかに白い部分を残したり, 文字や番号, 枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。（0または正数の場合は、符号欄にマークしない。）

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。（符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。）

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

- 1 xy 平面上の点 $P(x_1, y_1)$ から直線 $y = mx$ (ただし, m は定数) に垂線 PQ を下ろすとき, 点 Q の座標 (x_2, y_2) は 2 次正方行列 $A(m)$ によって

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A(m) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

(1)

$$A(2) = \frac{\begin{matrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{matrix}}{\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オ}} \end{pmatrix}}$$

である。

- (2) $A(m)A(2) = O$ (ただし, O は 2 次零行列) となるための条件は

$m = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。このとき, $B = A(2) + 2A(m)$ とおき, 任意の自然数 n に対して B の n 乗を

$$B^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおく。

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \times \boxed{\text{シ}}^n$$

である。

2 xyz 空間において、原点 O を中心とする半径 $2\sqrt{3}$ の球面 Q を考える。

(1) 球面 Q と平面 $z = \sqrt{6}$ が交わってできる円を S_1 としたとき、円

S_1 の半径は $\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(2) 円 S_1 において x 座標が $\sqrt{3}$ である 2 つの点を

$$A(\sqrt{3}, a, \sqrt{6}), \quad B(\sqrt{3}, b, \sqrt{6}) \quad (\text{ただし}, a > b)$$

とする。 $a = \sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(3) 円 S_1 において、2 つの弧 AB のうち短い方の長さは $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}} \pi$

である。

(4) 線分 AB の中点を C 、円 S_1 の中心を P とする。

$$\cos \angle COP = \frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

(5) 2 点 A, B と原点 O を通る平面が球面 Q と交わってできる円を S_2 とする。円 S_2 において、2 つの弧 AB のうち短い方の長さは

$\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \sqrt{\boxed{\text{ナ}}} \pi$ である。

3 $\log x$ は自然対数を表し, e は自然対数の底とする。

- (1) $y = x^2 - 2x$ と $y = \log x + a$ によって定まる xy 平面上の 2 つの曲線が接するための条件は

$$a = -\frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} + \log \left(\sqrt{\boxed{\text{ネ}}} - \boxed{\text{ノ}} \right)$$

である。このとき, 接点での接線の方程式は次で与えられる。

$$y = \left(\sqrt{\boxed{\text{ハ}}} - \boxed{\text{ヒ}} \right) x - \left(\boxed{\text{フ}} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}} \right)$$

- (2) $\frac{1}{e} < t < 1$ とし

$$S(t) = \int_0^1 |x e^{-x} - t x| dx$$

とおく。 $S(t)$ は $t = A$ のとき最小値 M をとるとする。

$$\log A = -\frac{\sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{\boxed{\text{ミ}}}$$

$$M = -A \left(\boxed{\text{ム}} + \sqrt{\boxed{\text{メ}}} \right) + \boxed{\text{モ}} + \frac{\boxed{\text{ヤ}}}{e}$$

である。

4 a, b を正の実数とする。実数全体の集合の部分集合 A, B を

$$A = \{x \mid x^3 - 12x - 2a < 0\}$$

$$B = \{x \mid -b < x < b\}$$

で定める。

(1) $a = 7, b = 1$ のとき

$$-2 \quad \boxed{\text{あ}} \quad A, \quad 3 \quad \boxed{\text{い}} \quad A, \quad A \quad \boxed{\text{う}} \quad B$$

である。

$\boxed{\text{あ}}, \boxed{\text{い}}, \boxed{\text{う}}$ の選択肢

(a) $\in$ (b) $\notin$ (c) $\ni$ (d) $\nexists$ (e) $\subset$ (f) $\supset$ (g) $=$

(2) $a = 7$ のとき, $-b \in A$ かつ $A \not\subset B$ となる最小の正の整数 b は $\boxed{\text{ユ}}$ である。

(3) 正の実数 a に対して, $A \supset B$ となるような b の最大値を $f(a)$ で表すことにする。 $f(a)$ は a の関数として $a = c$, ただし $c = \boxed{\text{ヨ}}$, で不連続であり, この c に対して

$$f(c) = \boxed{\text{ラ}}$$

$$\lim_{a \rightarrow c-0} f(a) = \boxed{\text{リ}}$$

$$\lim_{a \rightarrow c+0} f(a) = \boxed{\text{ル}}$$

である。