

1

(1)

$$\boxed{\text{ア}} \quad 17 \quad \boxed{\text{イ}} \quad 21$$

(2)

$$\boxed{\text{ウ}} \quad 5 \quad \boxed{\text{エ}} \quad 7$$

(3)

$$\boxed{\text{オ}} \quad 82 \quad \boxed{\text{カ}} \quad 40 \quad \boxed{\text{キ}} \quad 5 \quad \boxed{\text{ク}} \quad 2 \quad \boxed{\text{ケ}} \quad 4 \quad \boxed{\text{コ}} \quad 2$$

【解説】

(1)

まず、真数条件を考えて、
 $x > 0, y > 0, y + 1 > 0 \therefore x > 0, y > 0 \quad \cdots \text{①}$
である。

$$\begin{aligned} \log_{10} x + \log_{10} y - \log_{10} (y + 1) &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_{10} \frac{xy}{y + 1} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{xy}{y + 1} &= 10 \\ \Leftrightarrow xy &= 10(y + 1) \\ \Leftrightarrow (x - 10)y &= 10 \end{aligned}$$

となるから、 x, y が整数であることと、①に注意すると、次の場合が考えられる。

$x - 10$	1	2	5	10
y	10	5	2	1

したがって、
 $(x - 10) + y = 7$ または 11
となるので、
 $x + y = 17$ または 21
と求まる。

(2)

$$\begin{aligned} 100.1 &= 10^2 + 10^{-1} \\ \text{であることに注意すると、二項定理より} \\ (100.1)^7 &= (10^2 + 10^{-1})^7 \\ &= \sum_{k=0}^7 {}_7C_k (10^2)^k (10^{-1})^{7-k} \\ &= \sum_{k=0}^7 {}_7C_k 10^{2k-(7-k)} \\ &= \sum_{k=0}^7 {}_7C_k 10^{3k-7} \end{aligned}$$

と求まる。 ${}_7C_k$ は $k = 0$ から順に
 $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$
となり、高々2桁なので、 10^{3k-7} が k が1大きくなると3桁ずれることを考えれば、各位の数字を考えるときに、異なる k の値が干渉しあうことはない。
よって、100の位の数字は $100 = 10^2$ となるから、繰り上がりを考えると、 $3k - 7$ が1または2となる整数 k を考えればよく、 $k = 3$ となる。このとき、
 ${}_7C_k 10^{3k-7} = {}_7C_3 \cdot 10^2 = 3500$
であるから、100の位の数字は5となる。
同様に小数第4位の数字は $0.0001 = 10^{-4}$ となるので、 $3k - 7$ が $-5, -4$ となる整数 k を考えて、
 $k = 1$ が求まる。このとき、
 ${}_7C_k 10^{3k-7} = {}_7C_1 \cdot 10^{-4} = 0.0007$
より、小数第4位の数字は7となる。

(3)

M は BC の中点だから、 $MB = MC = 4$ である。よって、パップスの中線定理より、
$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2(AM^2 + MB^2) \\ &= 2(5^2 + 4^2) \\ &= 82 \end{aligned}$$

と求まる。一方、この結果と、余弦定理より、
$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \\ \Leftrightarrow 8^2 &= 82 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \frac{9}{40} \\ \Leftrightarrow \frac{9}{20} AB \cdot AC &= 82 - 64 = 18 \\ \therefore AB \cdot AC &= 40 \end{aligned}$$

となる。すると、

$$\begin{aligned} (AB + AC)^2 &= AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \\ &= 82 + 80 \\ &= 162 \\ &= 9^2 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\therefore AB + AC = 9\sqrt{2} \quad (\because AB + AC > 0)$$

となるから、解と係数の関係より、 AB, AC は
 $t^2 - 9\sqrt{2}t + 40 = 0$
の2解であり、

$$t^2 - 9\sqrt{2}t + 40 = (t - 4\sqrt{2})(t - 5\sqrt{2}) = 0 \therefore t = 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}$$

となるが、条件より、 $AB > AC$ ゆえ、
 $AB = 5\sqrt{2}, AC = 4\sqrt{2}$
となる。

2

- (1)

サ

 -2

シ

 8

ス

 -4

セ

 2

ソ

 -1

タ

 0

チ

 3
- (2)

ツ

 1

テ

 0

ト

 1

ナ

 1

ニ

 -4

ヌ

 1

ネ

 0
- (3)

ノ

 -1

ハ

 9

【解説】

- (1)
- $C: y = -x^2 + 4$ と $C_a: y = (x-a)^2 + a$ が異なる2点で交わるためには、この2式を連立して得られる x の2次方程式が相異なる2つの実数解を持てばよい。

$$\begin{aligned} -x^2 + 4 &= (x-a)^2 + a \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + (a^2 + a - 4) &= 0 \qquad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるので、方程式①の判別式 D が正であればよく、

$$\begin{aligned} D/4 &= a^2 - 2(a^2 + a - 4) > 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 - 2a + 8 &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a - 8 &< 0 \\ \Leftrightarrow (a+4)(a-2) &< 0 \\ \therefore -4 < a < 2 \end{aligned}$$

が求める条件である。また、

$$b = \sqrt{-a^2 - 2a + 8}$$

とおくとき、点 (a, b) は、

$$\begin{aligned} b^2 &= -a^2 - 2a + 8 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a + b^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow (a+1)^2 + b^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

を満たすから、中心 $(-1, 0)$ 、半径3の円周上にあることがわかる。

- (2)
- また、方程式①の2解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくとき、解と係数の関係から、

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= a \\ \alpha\beta &= \frac{a^2 + a - 4}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} 2\alpha\beta &= a^2 + a - 4 \\ \beta - \alpha &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{a^2 - 2(a^2 + a - 4)} \\ &= \sqrt{-a^2 - 2a + 8} \\ &= b \end{aligned}$$

と求まる。

- (3)
- $\alpha < x < \beta$ において、上に凸な C のグラフが C_a のグラフより上側にあることに注意すると、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} \left[(-x^2 + 4) - \{(x-a)^2 + a\} \right] dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (2x^2 - 2ax + a^2 + a - 4) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{2}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3} (-a^2 - 2a + 8)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ -(a+1)^2 + 9 \right\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、この最大値を求めるには、 $-(a+1)^2 + 9$ の最大値を考えればよく、区間

$-4 < a < 2$ において、これは $a = -1$ のとき、最大値9をとる。

ゆえに面積の最大値は、 $a = -1$ のとき、

$$\frac{1}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$$

となることがわかる。

3

(1)

ヒ 8 フ 27 ヘ 1 ホ 2

(2)

マ 2 ミ 9 ム 7 メ 27

(3)

モ 7 ヤ 27

【解説】

(1)

4回とも同じ数字が表示されるのは、 $(0, 0, 0, 0)$ または $(1, 1, 1, 1)$ の順に表示されるときで、その確率は、

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

と求まる。また、問題において、0と1は等価に扱われているので、4回目に表示された数字が0である確率と1である確率は等しく、いずれも $\frac{1}{2}$ である。

(2)

表示された4回の数字の合計が1となるのは、表示された数字が、 $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ のいずれかになるときで、それぞれの生起確率は次表のように求められる。

表示された数字	生起確率
$(1, 0, 0, 0)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$
$(0, 1, 0, 0)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{27}$
$(0, 0, 1, 0)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$
$(0, 0, 0, 1)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

ゆえに、4回連続してボタンを押したとき、数字の合計が1となる確率は、

$$\frac{2}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$$

と求まる。

一方で、表示された4回の数字の合計が2となるのは、表示された数字が $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$ のいずれかになるときで、それぞれの生起確率は次表のように求められる。

表示された数字	生起確率
$(1, 1, 0, 0)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$
$(1, 0, 1, 0)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{54}$
$(1, 0, 0, 1)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$
$(0, 1, 1, 0)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$
$(0, 1, 0, 1)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{54}$
$(0, 0, 1, 1)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

ゆえに、4回連続でボタンを押すときに、表示される数字の合計が2となる確率は、

$$\frac{2}{27} + \frac{1}{54} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54} + \frac{2}{27} = \frac{7}{27}$$

と求まる。

(3)

始めに1が表示されているので、2回目に0が出る確率は $\frac{1}{3}$ 、1が出る確率は $\frac{2}{3}$ となる。

題意を満たすのは、2回目から5回目に表示された数字が、 $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$ のいずれかとなるときであり、それぞれの場合の生起確率は次表のようになる。

2-5回目に表示された数字	生起確率
$(1, 1, 0, 0)$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$
$(1, 0, 1, 0)$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{81}$
$(1, 0, 0, 1)$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{81}$
$(0, 1, 1, 0)$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{81}$
$(0, 1, 0, 1)$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$
$(0, 0, 1, 1)$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{81}$

ゆえに、求める確率は、

$$\frac{8}{81} + \frac{2}{81} + \frac{4}{81} + \frac{2}{81} + \frac{1}{81} + \frac{4}{81} = \frac{7}{27}$$

と求まる。