

1

(1)	(i)	(c)	(ii)	(e)	(iii)	(e)
(2)	ア	-1	イ	2	ウ	4
(3)	エ	3	オ	4	カ	1

【解説】

(1)

(i)

$$A = \sin 1^\circ = \cos 1^\circ \tan 1^\circ < \tan 1^\circ = B \quad (\because 0 < \cos 1^\circ < 1)$$

である。また,

$$\begin{aligned} C &= 1 - \cos 2^\circ \\ &= 1 - (1 - 2\sin^2 1^\circ) \\ &= 2\sin^2 1^\circ \end{aligned}$$

である。ここで, $\sin 1^\circ < \sin 60^\circ = \frac{1}{2}$ であるから,

$$C = 2\sin^2 1^\circ < 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 1^\circ = \sin 1^\circ = A$$

である。以上より,

$$B > A > C$$

となる。

(ii)

$$\begin{aligned} A &= {}_{150}C_{80} \\ &= \frac{150!}{70! \cdot 80!} \\ &= \frac{81}{70} \cdot \frac{150!}{69! \cdot 81!} \\ &= \frac{81}{70} \cdot {}_{150}C_{81} \\ &> {}_{150}C_{81} \\ &= B \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} A &= {}_{150}C_{80} \\ &= \frac{150!}{70! \cdot 80!} \\ &= \frac{81}{151} \cdot \frac{151!}{70! \cdot 81!} \\ &= \frac{81}{151} \cdot {}_{151}C_{81} \\ &< {}_{151}C_{81} \\ &= C \end{aligned}$$

である。以上より,

$$C > A > B$$

となる。

(iii)

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{1}{\tan^2 15^\circ} \\ &= \frac{\cos^2 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} \\ &= \frac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ &= 7 + 4\sqrt{3} \\ &> 7 + 4 \cdot 1.7 \quad (\because \sqrt{3} > 1.7) \\ &= 12.8 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} 3 &< \pi < 3.15 \\ \Rightarrow 9 &< \pi^2 < 9.9225 \\ \Rightarrow (10 <) \frac{100}{9.9225} &< \frac{100}{\pi^2} < \frac{100}{9} (< 12.8) \\ \Rightarrow (B^2 <) A^2 &< 12.8 < C^2 \end{aligned}$$

より,

$$C > A > B$$

となる。

(2)

$\tan \alpha < 0$ であるから, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ であり, このとき $\cos \alpha < 0$ である。したがって,

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 7} = \frac{1}{8}$$

より,

$$\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

となる。

(3)

条件より,

$$\begin{cases} 10^5 \leq \frac{a^2}{b} < 10^6 & \cdots \textcircled{1} \\ 10^{-3} \leq \frac{b^2}{a} < 10^{-2} & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。①より,

$$\begin{aligned} 10^{-6} a^2 &< b \leq 10^{-5} a^2 \\ \Leftrightarrow 10^{-12} a^4 &< b^2 \leq 10^{-10} a^4 \\ \Leftrightarrow 10^{-12} a^3 &< \frac{b^2}{a} \leq 10^{-10} a^3 \end{aligned}$$

である。これと②より,

$$\begin{cases} 10^{-12} a^3 < 10^{-2} \Leftrightarrow a^3 < 10^{10} \Rightarrow a < 10^4 \\ 10^{-3} \leq 10^{-9} a^3 \Leftrightarrow 10^6 \leq a^3 \Leftrightarrow 10^2 \leq a \end{cases}$$

である。したがって,

$$10^2 \leq a < 10^4$$

が成り立つので, a は 3 桁または 4 桁となる。また,

$$\begin{aligned} 10^2 &\leq a < 10^4 \\ \Leftrightarrow 10^{-4} b^2 &< \frac{b^2}{a} \leq 10^{-2} b^2 \end{aligned}$$

であり, これと②より,

$$\begin{cases} 10^{-4} b^2 < 10^{-2} \Leftrightarrow b^2 < 10^2 \Leftrightarrow b < 10 \\ 10^{-3} \leq 10^{-2} b^2 \Leftrightarrow 10^{-1} \leq b^2 \Rightarrow 10^{-1} \leq b \end{cases}$$

である。ここで, b は自然数であるから,

$$0 < b < 10$$

が成り立つので, b は 1 桁となる。

(1)	キ	1	ク	2	ケ	3	コ	2	サ	4
(2)	シ	-2	ス	-2						
(3)	セ	-1	ソ	2	タ	-1	チ	2	ツ	1
	テ	1	ト	7	ナ	10	ニ	-1	ヌ	5

【解説】

(1)

円 C の方程式を変形すると、

$$x^2 + y^2 + (k-1)x - ky - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{k-1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{5}{4}$$

であるから、円 C の半径は、

$$\sqrt{\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}}$$

である。したがって、円 C の半径は $k = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ をとる。

(2)

円 C の中心の座標を (X, Y) とおくと、

$$\begin{cases} X = -\frac{k-1}{2} & \cdots \textcircled{1} \\ Y = \frac{k}{2} & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

である。ここで、 k は実数だから、 X, Y は全ての実数を取りうる。②より $k = 2Y$ であるから、これを①に代入すると、

$$X = -\frac{2Y-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -2X - 2Y + 1 = 0$$

であるから、円 C の中心の軌跡の方程式は、

$$-2x - 2y + 1 = 0$$

となる。

(3)

円 C の方程式を変形すると、

$$x^2 + y^2 + (k-1)x - ky - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - x - 1) + k(x - y) = 0$$

である。任意の k に対してこれが成り立つとき、

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 1 = 0 & \cdots \textcircled{3} \\ x - y = 0 & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

である。ここで、

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow y = x$$

であるから、これを③に代入すると、

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, 1$$

が得られるので、円 C は任意の k に対し、必ず点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1, 1)$ を通る。また、 $k = 3$ のとき、円 C の方程式は、

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

であるから、点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ における円の接線は、

$$\left(-\frac{1}{2}+1\right)(x+1) + \left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 8y = 3 \quad \cdots \textcircled{5}$$

であり、点 $(1, 1)$ における円の接線の方程式は、

$$(1+1)(x+1) + \left(1-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x - y = 3 \quad \cdots \textcircled{6}$$

である。ここで、⑤、⑥を連立して解くと、

$$(x, y) = \left(\frac{7}{10}, -\frac{1}{5}\right)$$

となるので、これが求める交点の座標である。

(1)	ネ	1	ノ	3	ハ	1	ヒ	3
(2)	フ	2	ヘ	3	ホ	5	マ	27
(3)	ミ	4	ム	27	メ	2	モ	9
	ヤ	13	ユ	27				

【解説】

(1)

3 人で行うじゃんけんの手の出し方の総数は 3^3 通りである。1 人が勝ち 2 人が負けるとき、誰が勝つかで ${}_3C_1$ 通り、どの手で勝つかで ${}_3C_1$ 通りあるので、この確率は、

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_3C_1}{3^3} = \frac{1}{3}$$

である。

また、3 人で行うじゃんけんでは、「1 人が勝つ」、「2 人が勝つ」、「あいこになる」の 3 通りが考えらる。2 人が勝ち 1 人が負けるとき、誰が勝つかで ${}_3C_2$ 通り、どの手で勝つかで ${}_3C_1$ 通りあるので、この確率は、

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_1}{3^3} = \frac{1}{3}$$

である。よって、あいこになる確率は、余事象を考えて

$$1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

である。

(2)

3 人で行うじゃんけんについての確率は(1)で求めた通りである。2 人で行うじゃんけんについての確率も(1)と同様に求めることができ、それらの確率をまとめると次のようになる。

	1 人が勝つ	2 人が勝つ	あいこになる
3 人のじゃんけん	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2 人のじゃんけん	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$

2 回以内のじゃんけんで 1 人の勝者が決まる方法は、

- [1] 1 回目で 1 人が勝つ
- [2] 1 回目で 2 人が勝ち、2 回目で 1 人が勝つ
- [3] 1 回目であいこになり、2 回目で 1 人が勝つ

の 3 通りがある。

[1] 1 回目で 1 人が勝つとき

表から、この確率は $\frac{1}{3}$ である。

[2] 1 回目で 2 人が勝ち、2 回目で 1 人が勝つとき

表から、この確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

である。

[3] 1 回目であいこになり、2 回目で 1 人が勝つとき

表から、この確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

である。

以上[1], [2], [3]から、2 回以内で 1 人の勝者が決まる確率は、

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

である。

また、ちょうど 3 回で 1 人の勝者が決まる方法は、

- [4] 1 回目、2 回目であいこになり、3 回目で 2 人が勝つ
- [5] 1 回目であいこになり、2 回目で 1 人が勝ち、3 回目で 1 人が勝つ
- [6] 1 回目で 1 人が勝ち、2 回目であいこになり、3 回目で 1 人が勝つ

の 3 通りがある。

[4] 1 回目、2 回目であいこになり、3 回目で 2 人が勝つとき

表から、この確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

である。

[5] 1 回目であいこになり、2 回目で 1 人が勝ち、3 回目で 1 人が勝つとき

表から、この確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

である。

[6] 1 回目で 1 人が勝ち、2 回目であいこになり、3 回目で 1 人が勝つとき

表から、この確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

である。

以上[4], [5], [6]から、ちょうど 3 回で 1 人の勝者が決まる確率は、

$$\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{5}{27}$$

である。

(3)

(1)と同様に考える。1 人が勝ち 3 人が負ける確率は、

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_1}{3^4} = \frac{4}{27}$$

である。

2 人が勝ち 2 人が負ける確率は、

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_1}{3^4} = \frac{2}{9}$$

である。

3 人が勝ち 1 人が負ける確率は、

$$\frac{{}_4C_3 \cdot {}_3C_1}{3^4} = \frac{4}{27}$$

である。ここで、4 人で行うじゃんけんで考えられるのは、「1 人が勝つ」、「2 人が勝つ」、「3 人が勝つ」、「あいこになる」の 4 通りだけなので、あいこになる確率は、

$$1 - \left(\frac{4}{27} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} \right) = \frac{13}{27}$$

である。