

1

(1) $3, 7$

(2) $\boxed{\text{ア}} \quad 4 \quad \boxed{\text{イ}} \quad 5$

(3) $\boxed{\text{ウ}} \quad -2$

【解説】

(1) 各命題から、「入学試験科目に数学がある学部数」がいくつかを求めると、次の通りとなる。

命題	数学がある学部数の可能性
(A)	1, 2, 3, 4, 5
(B)	1
(C)	5
(D)	0, 1, 2, 3, 4
(E)	0
(F)	4
(G)	1, 2, 3, 4

よって、それぞれの否定命題から導かれる「入学試験科目に数学がある学部数」は次の通りとなる。

命題	数学がある学部数の可能性
(A) の否定	0
(B) の否定	0, 2, 3, 4, 5
(C) の否定	0, 1, 2, 3, 4
(D) の否定	5
(E) の否定	1, 2, 3, 4, 5
(F) の否定	0, 1, 2, 3, 5
(G) の否定	0, 5

よって、2つの表を比べることにより、求める組み合わせは (A) と (E)、(C) と (D) となる。

(2) 問題文より、
$$p(x) = f(x) + g(x) \quad \cdots \cdots \text{①}$$
$$q(x) = f(x)g(x) \quad \cdots \cdots \text{②}$$

である。また、
$$\frac{d}{dx} p(x) = 3, \frac{d}{dx} q(x) = 4x + k$$
を x で積分することにより、定数 C_1, C_2 を用いて、
$$p(x) = 3x + C_1, q(x) = 2x^2 + kx + C_2$$
と書けることがわかる。ここで、①式、②式と
$$f(0) = 1, g(0) = 2 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

を使うと
$$C_1 = p(0) = f(0) + g(0) = 3$$
$$C_2 = q(0) = f(0)g(0) = 2$$

となるので、
$$p(x) = 3x + 3 \quad \cdots \cdots \text{④}$$
$$q(x) = 2x^2 + kx + 2 \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$
とわかる。 $f(x)$ と $g(x)$ の積である $q(x)$ が 2 次式なので、次の 3 つの場合が考えられる。

- [1] $f(x)$ が 2 次式、 $g(x)$ が 0 次式(定数)のとき
このとき、 $p(x) = f(x) + g(x)$ は 2 次式となるから、④に矛盾。
- [2] $f(x)$ が 0 次式(定数)、 $g(x)$ が 2 次式のとき
このときも同様にして、 $p(x) = f(x) + g(x)$ は 2 次式となるから、④に矛盾。
- [3] $f(x), g(x)$ がともに 1 次式のとき
このとき、③と④から、 $a \neq 0, 3$ なる未知数 a を用いて、
$$f(x) = ax + 1, g(x) = (3 - a)x + 2$$
と書くことができる。すると、②と⑤より、
$$(ax + 1)\{(3 - a)x + 2\} = 2x^2 + kx + 2$$
$$\Leftrightarrow a(3 - a)x^2 + (a + 3)x + 2 = 2x^2 + kx + 2$$
が成り立つから、係数を比較して、
$$a(3 - a) = 2 \quad \cdots \cdots \text{⑥}$$
$$a + 3 = k \quad \cdots \cdots \text{⑦}$$
となる。⑥を解くと、
$$a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a - 2) = 0 \quad \therefore a = 1, 2$$
であり、よって、⑦から
$$k = a + 3 = 4 \text{ または } 5$$
と求まる。

以上、[1], [2], [3]より、 $k = 4, 5$ となる。

(3)
$$4^{x+1} + 3 \cdot 2^x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 + 3 \cdot 2^x - 1 = 0$$

ここで、 $t = 2^x$ とおくと、 $t > 0$ であるから、
$$\Leftrightarrow 4t^2 + 3t - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (4t - 1)(t + 1) = 0$$
$$\therefore t = \frac{1}{4}$$

と求まる。 $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ であるので、 $x = -2$ が解である。

- (1) $\boxed{\text{エ}} -1 \quad \boxed{\text{オ}} -1$
- (2) $\boxed{\text{カ}} -2 \quad \boxed{\text{キ}} -3 \quad \boxed{\text{ク}} 4 \quad \boxed{\text{ケ}} 3 \quad \boxed{\text{コ}} 4 \quad \boxed{\text{サ}} 1$
- (3) $\boxed{\text{シ}} -4 \quad \boxed{\text{ス}} 5 \quad \boxed{\text{セ}} 2 \quad \boxed{\text{ソ}} 2$
- (4) $\boxed{\text{タ}} -1 \quad \boxed{\text{チ}} 2 \quad \boxed{\text{ツ}} 3 \quad \boxed{\text{テ}} 9$

【解説】

- (1) 直線 ℓ の式を m について整理すると、

$$m(x+1)-(y+1)=0$$
となるので、これが m によらずに成立する (x, y) は

$$x+1=0, y+1=0 \quad \therefore x=-1, y=-1$$
を満たす。よって求める定点の座標は、 $(-1, -1)$ である。
- (2) まず、円 A との共有点の個数 n_a について考える。これは直線 $\ell: mx-y+m-1=0$ と円 A の中心 $(4, -1)$ の距離と、円 A の半径である 3 の大小を比べればよい。 $n_a=0$ となるのは、

$$\begin{aligned} \frac{|4m-(-1)+m-1|}{\sqrt{m^2+1}} &> 3 \\ \Leftrightarrow |5m| &> 3\sqrt{m^2+1} \\ \Leftrightarrow 25m^2 &> 9(m^2+1) \\ \Leftrightarrow 16m^2-9 &> 0 \\ \Leftrightarrow (4m+3)(4m-3) &> 0 \\ \therefore m &< -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} < m \end{aligned}$$

のときである。同様にして「 $=3$ 」、「 <3 」を考えることにより、 n_a は以下のようになる。

$$n_a = \begin{cases} 0 & m < -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} < m \text{ のとき} \\ 1 & m = \pm \frac{3}{4} \text{ のとき} \\ 2 & -\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4} \text{ のとき} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

次に放物線 B との共有点の個数 n_b を考える。 $\ell: y=mx+m-1$ と

$$B: y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を連立すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 + 1 &= mx + m - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4mx - 4m + 8 &= 0 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となるので、この方程式の判別式 D と 0 との大小を考えればよい。 $n_b=0$ となるのは、

$$\begin{aligned} D/4 &= (2m)^2 - (-4m+8) < 0 \\ \Leftrightarrow 4(m^2+m-2) &< 0 \\ \Leftrightarrow (m+2)(m-1) &< 0 \\ \therefore -2 &< m < 1 \end{aligned}$$

のときとなる。同様に $D=0$, $D>0$ の場合も考えると、 n_b は以下のようになる。

$$n_b = \begin{cases} 0 & -2 < m < 1 \text{ のとき} \\ 1 & m = -2, 1 \text{ のとき} \\ 2 & m < -2, 1 < m \text{ のとき} \end{cases} \quad \cdots \textcircled{4}$$

以上を踏まえて、 $n_a+n_b=2$ となるときを考える。以下の 3 つの場合がありうる。

[1] $n_a=2, n_b=0$ のとき

このとき、①の $n_a=2$ と、④の $n_b=0$ となる m の共通部分を考えて、

$$-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$$

と求まる。

[2] $n_a=1, n_b=1$ のとき

このとき、①の $n_a=1$ と、④の $n_b=1$ となる m の共通部分を考えて、条件をみたす m はないことがわかる。

[3] $n_a=0, n_b=2$ のとき

このとき、①の $n_a=0$ と、④の $n_b=2$ となる m の共通部分を考えて、

$$m < -2, 1 < m$$

と求まる。

以上[1], [2], [3]より、 $n_a+n_b=2$ となるのは、

$$m < -2, -\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}, 1 < m$$

のときである。

- (3) ℓ と B の共有点の x 座標は、方程式③の解であったことに注意する。 $m=-2$ のとき、③は

$$x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 0 \quad \therefore x = -4$$

となり、これを B の式②に代入すれば、 $y = \frac{1}{4} \cdot (-4)^2 + 1 = 5$ となるので、 $P(-4, 5)$ である。

同様にして、 $m=1$ のとき、③から

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \quad \therefore x = 2$$

となり、②に代入して、 $y = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + 1 = 2$ となるので、 $Q(2, 2)$ となる。

- (4) (3)より直線 PQ の式は

$$y-2 = \frac{2-5}{2-(-4)}(x-2) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 3$$

となる。 $-4 < x < 2$ において、直線 PQ が放物線 B よりも上側にあることに注意すれば、それらで囲まれた面積は、

$$\begin{aligned} &\int_{-4}^2 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + 3 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-4}^2 (x+4)(x-2) dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \{ 2 - (-4) \}^3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

となる。

3

(1) (i) ト 6

(ii) ナ 1 ニ 4 ヌ 1 ネ 6

(iii) ノ 10 ハ 3

(2) (i) ヒ 5

(ii) フ 1 ヘ 5 ホ 1 マ 5

(iii) ミ 10 ム 3

【解説】

(1)

(i)

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 0\leq a\leq 2, 0\leq b\leq 2, 0\leq c\leq 2 \end{cases}$$

を満たす整数 (a, b, c) の組の個数を求めればよい。このような (a, b, c) の組は、

$$(a, b, c) = (2, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2)$$

であるから、6通りとなる。

(ii)

$$\text{赤を取り出す確率} : \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{白を取り出す確率} : \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{青を取り出す確率} : \frac{1}{6}$$

であるから、 $(a, b, c) = (2, 0, 0)$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

となる。また、 $(a, b, c) = (1, 0, 1)$ となる確率は、

$${}_2C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

となる。

(iii)

(a, b, c) の値に応じた得点および各場合の生起確率を表にすると、次のようになる。

(a, b, c) の値	得点	確率
$(2, 0, 0)$	2	$\frac{1}{4}$
$(1, 1, 0)$	$2+1=3$	$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
$(1, 0, 1)$	$1+3=4$	$\frac{1}{6}$
$(0, 2, 0)$	4	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
$(0, 1, 1)$	$2+3=5$	$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$
$(0, 0, 2)$	$3+3=6$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

したがって、得点の期待値は、

$$2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{10}{3}$$

となる。

(2)

(i)

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=2 \\ 0\leq \alpha\leq 2, 0\leq \beta\leq 2, 0\leq \gamma\leq 1 \end{cases}$$

を満たす整数 (α, β, γ) の組の個数を求めればよい。このような (α, β, γ) の組は、

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0), (0, 1, 1)$$

であるから、5通りとなる。

(ii)

全ての取り出し方は、 ${}_6C_2 = 15$ (通り) であり、

赤玉が 2 個となる取り出し方は、 ${}_3C_2 = 3$ (通り) であるから、

$(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 0, 0)$ となる確率は、

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

となる。また、赤玉が 1 個、青玉が 1 個となる取り出し方は $3 \cdot 1 = 3$ (通り) であるから、

$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1)$ となる確率は、

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

となる。

(iii)

(α, β, γ) の値に応じた得点および各場合の生起確率を表にすると、次のようになる。

(α, β, γ) の値	得点	確率
$(2, 0, 0)$	2	$\frac{1}{5}$
$(1, 1, 0)$	$2+1=3$	$\frac{3 \cdot 2}{15} = \frac{2}{5}$
$(1, 0, 1)$	$1+3=4$	$\frac{1}{5}$
$(0, 2, 0)$	4	$\frac{{}_2C_2}{15} = \frac{1}{15}$
$(0, 1, 1)$	$2+3=5$	$\frac{2 \cdot 1}{15} = \frac{2}{15}$

したがって、得点の期待値は

$$2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{15} + 5 \cdot \frac{2}{15} = \frac{10}{3}$$

となる。