

1

(1) $\boxed{\text{ア}} \quad 1 \quad \boxed{\text{イ}} \quad 16$

(2) (i) $\boxed{\text{ウ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{エ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{オ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{カ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{キ}} \quad 2$

 (ii) $\boxed{\text{ク}} \quad 1 \quad \boxed{\text{ケ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{コ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{サ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{シ}} \quad -1$

$\boxed{\text{ス}} \quad 4 \quad \boxed{\text{セ}} \quad -1 \quad \boxed{\text{ソ}} \quad 2$

【解説】

(1)

$x > 1$ より, $\log_2 x > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\sqrt{\log_2 x} &> \log_2 \sqrt{x} \\ \Leftrightarrow \log_2 x &> (\log_2 \sqrt{x})^2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &> \frac{1}{4}(\log_2 x)^2 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x)(\log_2 x - 4) &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 < \log_2 x &< 4 \\ \Leftrightarrow 1 < x &< 16\end{aligned}$$

である。

(2)

(i)

$$\begin{aligned}t^2 &= \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= 1 - 2 \sin x \cos x\end{aligned}$$

より,

$$\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$$

である。よって, y に代入して,

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{2}t - \frac{1-t^2}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}t^2 + \sqrt{2}t + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。

(ii)

(i)より,

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}t^2 + \sqrt{2}t + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(t + \sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned}t = \sin x - \cos x &= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

より,

$$-\sqrt{2} \leq t \leq 1$$

である。よって,

$$t = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

で y は最大値

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \sqrt{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

をとり,

$$t = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$$

で y は最小値

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{2} + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

をとる。

(1)

$$\boxed{\text{タ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{チ}} \quad 5$$

(2)

$$\boxed{\text{ツ}} \quad 1 \quad \boxed{\text{テ}} \quad 2 \quad \boxed{\text{ト}} \quad 5 \quad \boxed{\text{ナ}} \quad 9 \quad \boxed{\text{ニ}} \quad -10$$

(3)

$$\boxed{\text{ヌ}} \quad 3 \quad \boxed{\text{ネ}} \quad 5 \quad \boxed{\text{ノ}} \quad 5 \quad \boxed{\text{ハ}} \quad -5 \quad \boxed{\text{ヒ}} \quad 4$$

(4)

$$\boxed{\text{フ}} \quad 3 \quad \boxed{\text{ヘ}} \quad 4 \quad \boxed{\text{ホ}} \quad 5$$

【解説】

(1)

$$y' = 2x$$

より、Pにおける放物線 F の接線の傾きは $2t$ 、直線 AP の傾きは $\frac{t^2+1}{t-5}$ である。よって、

$$\begin{aligned} 2t \cdot \left(\frac{t^2+1}{t-5} \right) &= -1 \\ \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+2t+5) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1 \end{aligned}$$

である。よって、P(1, 2) より、

$$AP = \sqrt{(1-5)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} \triangle OPQ \text{ の面積} &= \frac{1}{2} |a(t^2+1) - bt| \\ &= \frac{1}{2} \left| a \left(t - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + a \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| a \left(t - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{16 - (a-5)^2}{4a} + a \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} a \left(t - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(5a + \frac{9}{a} - 10 \right) \right| \end{aligned}$$

である。ここで、 $a > 0$ なので、相加相乗平均の関係より、

$$\frac{1}{2} a \left(t - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(5a + \frac{9}{a} - 10 \right) \geq \frac{1}{8} \left(2\sqrt{5a \cdot \frac{9}{a}} - 10 \right) = \frac{3\sqrt{5} - 5}{4} > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

より、

$$\triangle OPQ \text{ の面積} = \frac{1}{2} a \left(t - \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(5a + \frac{9}{a} - 10 \right)$$

である。よって、 $t = \frac{b}{2a}$ のとき、 $\triangle OPQ$ の面積は最小値 $\frac{1}{8} \left(5a + \frac{9}{a} - 10 \right)$ をとる。

(3)

①の等号が成立するのは

$$5a = \frac{9}{a} \Leftrightarrow a = \frac{3}{5}\sqrt{5} \quad (\because 1 \leq a \leq 9)$$

のときである。よって、 $a = \frac{3}{5}\sqrt{5}$ のとき、 $\triangle OPQ$ の面積は最小値

$$\frac{3\sqrt{5} - 5}{4} = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{5}$$

をとる。

3

(1)

マ 3 ミ 5

(2)

ム 3 メ 7

(3)

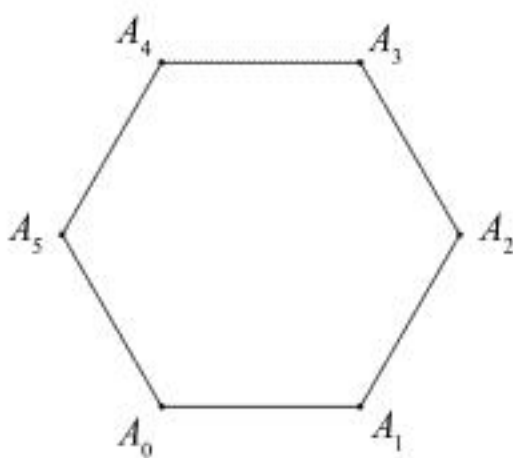
モ 3 ヤ 1 ュ 3 ヨ 4 ラ 4 リ 1

(4)

ル 3 レ 4 ロ 1 ワ 2

【解説】

(1)



正六角形の頂点から1点を選び、その点を A_0 とする。それ以外の点を、前図のように定める。このとき、点 A_0 を直角にするような直角三角形を作るような残りの2点の選び方は、

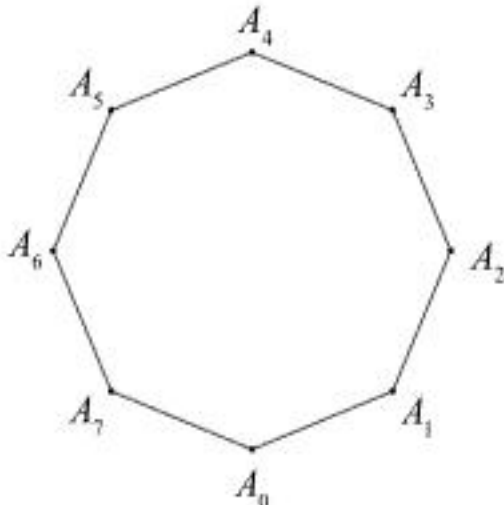
$$(A_1, A_4), (A_2, A_5)$$

の2通りが考えられる。点 A_0 の選び方は全部で6通り考えられるので、三角形が直角三角形となる確率は

$$\frac{6 \times 2}{{}_6C_3} = \frac{3}{5}$$

となる。

(2)



正八角形の頂点から1点を選び、その点を A_0 とする。それ以外の点を、前図のように定める。このとき、点 A_0 を鈍角にするような鈍角三角形を作るような残りの2点の選び方は、

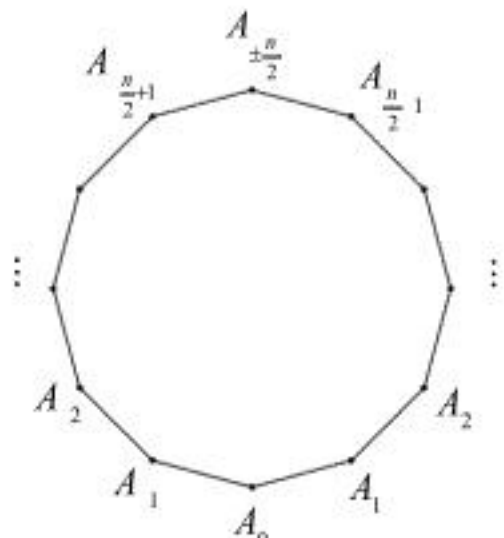
$$(A_1, A_6), (A_1, A_7), (A_2, A_7)$$

の3通りが考えられる。点 A_0 の選び方は全部で8通り考えられるので、三角形が鈍角三角形となる確率は

$$\frac{8 \times 3}{{}_8C_3} = \frac{3}{7}$$

となる。

(3)



n が偶数のとき、正 n 角形において1つの点を選んでその点を A_0 と定めたとき、残りの点を前図のように定めることにする。

点 A_0 を直角にするような直角三角形を作るような残りの2点の選び方は、

$$A_1, A_{\frac{n}{2}+1}, A_2, A_{\frac{n}{2}+2}, \dots, A_{\frac{n}{2}-1}, A_{\frac{n}{2}-2}$$

の $\frac{n}{2}-1$ 通りが考えられる。点 A_0 の選び方は全部で n 通り考えられるので、三角形が直角三角形となる確率は

$$\frac{\frac{n}{2}-1 \times n}{{}_nC_3} = \frac{\frac{1}{2}(n-2)n}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{3}{n-1}$$

となる。

次に、点 A_0 を鈍角にするような鈍角三角形を作るような残りの2点の選び方を考える。点 A_0 以外の点として点 $A_{\frac{n}{2}-1}, A_{\frac{n}{2}}, A_{\frac{n}{2}+1}$ のいずれかを選んでしまうと、点 A_0 が鈍角になるように残りの1点を選べない。このことに注意して2点目として $A_1, A_2, \dots, A_{\frac{n}{2}-2}$ から点 A_x を選ぶと、3点目は点 $A_{\frac{n}{2}+1}, A_{\frac{n}{2}+2}, \dots, A_{\frac{n}{2}+x}$ から選べば良い。したがって、点 A_0 を鈍角にするような三角形の個数は

$$\sum_{x=1}^{\frac{n}{2}-2} \frac{n-1-x}{2} = \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(n-2)(n-4)$$

となる。点 A_0 の選び方は全部で n 通り考えられるので、三角形が鈍角三角形となる確率は

$$\frac{\frac{1}{8}(n-2)(n-4) \times n}{{}_nC_3} = \frac{\frac{1}{8}(n-2)(n-4) \times n}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{3}{4} \times \frac{n-4}{n-1}$$

となる。

(4)

正 n 角形の頂点から1点を選び、その点を A_0 とする。それ以外の点を、(3)のように定める。点 A_0 を頂角とする正三角形以外の二等辺三角形を作るような残りの2点の選び方は、

$$(A_1, A_{\frac{n}{3}-1}), (A_2, A_{\frac{n}{3}-2}), \dots, (A_{\frac{n}{3}-1}, A_{\frac{n}{3}-2}), (A_{\frac{n}{3}-1}, A_{\frac{n}{3}-1}), \dots, (A_{\frac{n}{2}-1}, A_{\frac{n}{2}-1})$$

の $\frac{n}{2}-2$ 通りが考えられる。点 A_0 の選び方は全部で n 通り考えられるので、三角形が正三角形以外の二等辺三角形となる確率は

$$\frac{\frac{n}{2}-2 \times n}{{}_nC_3} = \frac{\frac{1}{2}(n-4)n}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{3(n-4)}{(n-1)(n-2)}$$

となる。