

1

- (1) ア 3
(2) イ 16 ウ 1 エ 2 オ 2
(3) カ 2 キ 0 ク 1 ケ 1 コ 1 サ 1

〔解説〕

(1)

$$P(1)=2 \Leftrightarrow a+b+c=2$$

を満たす (a,b,c) の組を求めればよい。これは、 $a \geq 1, b \geq 0, c \geq 0$ であるから、

$$(a,b,c)=(1,0,1),(1,1,0),(2,0,0)$$

の3個となる。

(2)

[1] $n=1$ のとき

$$P(1)=5 \Leftrightarrow a+b+c=5$$

を満たす (a,b,c) の組を求めればよい。これは、 $a \geq 1, b \geq 0, c \geq 0$ であるから、

$$(a,b,c)=(5,0,0),(4,1,0),(4,0,1),(3,2,0),(3,1,1), \\ (3,0,2),(2,3,0),(2,2,1),(2,1,2),(2,0,3), \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ (1,0,4),(1,1,3),(1,2,2),(1,3,1),(1,4,0)$$

の15個となる。

[2] $n=2$ のとき

$$P(2)=5 \Leftrightarrow 4a+2b+c=5$$

を満たす (a,b,c) の組を求めればよい。これは、 $a \geq 1, b \geq 0, c \geq 0$ であるから、

$$(a,b,c)=(1,0,1) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の1個となる。

[3] $n \geq 3$ のとき

$$P(n)=an^2+bn+c \geq an^2 \geq 9$$

となるから、不適である。

以上[1],[2],[3]より、求める個数は、

$$15+1=16 \text{ (個)}$$

となる。また、

$$P(3)=17 \Leftrightarrow 9a+3b+c=17$$

を満たす (a,b,c) の組は、

$$(a,b,c)=(1,0,8),(1,1,5),(1,2,2)$$

であるが、このうち①または②に存在するものは、

$$(a,b,c)=(1,2,2)$$

である。したがって、『 $P(n)=5$ を満たす自然数 n が存在する』を満たす $P(x)$ のうち、

$P(3)=17$ を満たすものは、

$$P(x)=x^2+2x+2$$

となる。

(3)

まず、『 $P(n)=3$ を満たす自然数 n が存在する』を満たす (a,b,c) の組を求める。

[1] $n=1$ のとき

$$P(1)=3 \Leftrightarrow a+b+c=3$$

を満たす (a,b,c) の組は、

$$(a,b,c)=(3,0,0),(2,1,0),(2,0,1),(1,2,0),(1,1,1),(1,0,2)$$

となる。

[2] $n \geq 2$ のとき

$$P(n)=an^2+bn+c \geq an^2 \geq 4$$

となるから、不適である。

以上[1],[2]より、『 $P(n)=3$ を満たす自然数 n が存在する』を満たす (a,b,c) の組は、

$$(a,b,c)=(3,0,0),(2,1,0),(2,0,1),(1,2,0),(1,1,1),(1,0,2)$$

となる。

ここで、 $(a,b,c)=(3,0,0),(2,1,0)$ のとき、 $P(n)$ はそれぞれ、

$$P(n)=3n^2, P(n)=2n^2+n$$

であり、これは偶数になり得るが、 $(a,b,c)=(2,0,1)$ のとき、

$$P(n)=2n^2+1$$

であり、これは任意の n に対して奇数である。

したがって、『 $P(n)=3$ を満たす自然数 n が存在し、かつ、任意の自然数 m に対して $P(m)$ が

奇数である』を満たす $P(x)$ のうち、 a が最大のものは、

$$P(x)=2x^2+1$$

となる。また、 $(a,b,c)=(1,0,2),(1,2,0)$ のとき、 $P(n)$ はそれぞれ、

$$P(n)=n^2+2, P(n)=n^2+2n$$

であり、これは偶数になり得るが、 $(a,b,c)=(1,1,1)$ のとき、

$$P(n)=n^2+n+1=n(n+1)+1$$

であり、これは任意の n に対して奇数である。

したがって、『 $P(n)=3$ を満たす自然数 n が存在し、かつ、任意の自然数 m に対して $P(m)$ が

奇数である』を満たす $P(x)$ のうち、 a が最小のものは、

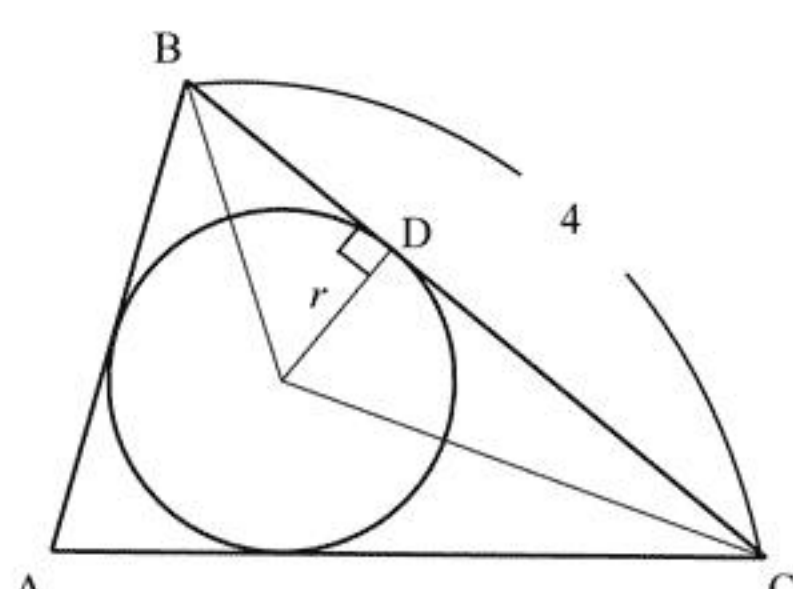
$$P(x)=x^2+x+1$$

となる。

- (1) シ 1 ス 2
 (2) セ 3 ソ 5 タ 5 チ 13
 (3) ツ 25 テ 14
 (4) ト 15 ナ 7

〔解説〕

(1)



上図のように点 D をとり、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r とすると、

$$\begin{cases} \tan \frac{B}{2} = \frac{r}{BD} = \frac{1}{3} & \dots \textcircled{1} \\ \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{4-BD} = \frac{1}{5} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、 $\textcircled{1} \Leftrightarrow BD = 3r$ を $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{r}{4-3r} &= \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow 5r &= 4-3r \\ \Leftrightarrow r &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られる。

(2)

$$\begin{aligned} \sin B &= 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ &= 2 \tan \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \\ &= 2 \tan \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \sin C &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \tan \frac{C}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \\ &= 2 \tan \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= \frac{5}{13} \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin \{ \pi - (B + C) \} \\ &= \sin (B + C) \\ &= \sin B \cos C + \cos B \sin C \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 < \tan \frac{B}{2} < 1, 0 < \tan \frac{C}{2} < 1$ より、

$$\begin{aligned} 0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{4}, 0 < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow 0 < B < \frac{\pi}{2}, 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \cos B > 0, \cos C > 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos B &= \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \\ \cos C &= \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \sin A &= \sin B \cos C + \cos B \sin C \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} \\ &= \frac{56}{65} \end{aligned}$$

であるから、正弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{4}{\sin A} &= \frac{AB}{\sin C} \\ \Leftrightarrow AB &= 4 \cdot \frac{\sin C}{\sin A} = 4 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{65}{56} = \frac{25}{14} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$\triangle ABC$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{14} \cdot 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{7}$$

となる。

3

- (1) $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{三} & -1 & \text{又} & 3 \\ \hline \end{array}$
- (2) $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{ネ} & -1 & \text{ノ} & 3 & \text{ハ} & 2 \\ \hline \end{array}$
- (3) $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{ヒ} & 2 & \text{フ} & 3 & \text{ヘ} & 3 & \text{ホ} & 0 \\ \hline \end{array}$
- (4) $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{マ} & 2 & \text{ミ} & 3 \\ \hline \end{array}$
- (5) $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{ム} & 8 & \text{メ} & 8 & \text{モ} & 9 & \text{ヤ} & 3 \\ \hline \end{array}$

【解説】

- (1) $\triangle BCD \perp OA$ より、点 B, C, D の z 座標は全て等しい。よって、その z 座標を z_1 とおくと、正四面体の重心の z 座標を考えれば

$$\frac{1+3z_1}{4}=0 \Leftrightarrow z_1=-\frac{1}{3}$$

である。

- (2) 点 B の x 座標を x_1 とおくと、

$$x_1^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

である。点 C と点 D は平面 $OAB = xz$ 平面に関して対称なので、その x 座標は等しい。よって、その x 座標を x_2 とおくと、正四面体の重心の x 座標を考えれば

$$\frac{x_1+2x_2}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{2}$$

である。

- (3) (2)より、点 C, D の y 座標は

$$\pm \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である。よって、

$$B\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{3}\right), C\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right), D\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

である。ここで、対称性より $\triangle ABC$ の重心は直線 OD 上の点なので、点 P は点 D と原点对称

な点であるから、その座標は $P\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ である。よって、

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}(\sqrt{2}, \sqrt{6}, -2)$$
$$|\overrightarrow{AP}| = \frac{1}{3}\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 + (-2)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

である。また、

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2)$$

より、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left\{ -(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2 \right\} = 0$$

である。

- (4) (3)より $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ であり、対称性より $AP = BP$ なので、

$$\triangle APB = \frac{1}{2}AP^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

である。

- (5) V の面は、四面体 V_P, V_Q, V_R, V_I の面のうち、正四面体 ABCD と共有していない 12 個の面である。よって、 V の表面積は対称性より、

$$12 \cdot \triangle APB = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$$

である。また、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}, 0, \frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}(\sqrt{2}, 0, 2)$$
$$|\overrightarrow{AB}|^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left\{ (\sqrt{2})^2 + 2^2 \right\} = \frac{8}{3}$$

より、正四面体 ABCD の体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 \sin \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3}$$
$$= \frac{8}{27}\sqrt{3}$$

である。また、対称性より $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{AP}, AP = BP = CP$ が成り立つので、四面体

V_P の体積は $\frac{1}{6}AP^3$ と表せる。よって、対称性より四面体 V_P, V_Q, V_R, V_I の体積の合計は

$$4 \cdot \frac{1}{6}AP^3 = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 = \frac{16}{27}\sqrt{3}$$

である。以上より、 V の体積は

$$\frac{8}{27}\sqrt{3} + \frac{16}{27}\sqrt{3} = \frac{8}{9}\sqrt{3}$$

である。