

1

- (1) ア 0 イ 15 ウ 24
 (2) エ 1 オ 3 カ 1 キ 3

【解説】

(1)

$$a = \frac{413}{8} \div \frac{1}{2} + 6^{\frac{1}{3}}, b = \frac{413}{8} \div \frac{1}{2} - 6^{\frac{1}{3}}$$

とおくと、

$$= a - b$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} ab &= \left(\frac{413}{8} \div \frac{1}{2} + 6^{\frac{1}{3}} \right) \left(\frac{413}{8} \div \frac{1}{2} - 6^{\frac{1}{3}} \right) \\ &= \frac{413}{8} \cdot 6^{\frac{1}{3}} + \frac{413}{8} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{125}{8} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} &^3 = (a - b)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ &= \left(\frac{413}{8} \div \frac{1}{2} + 6 \right)^3 - 3ab \left(\frac{413}{8} \div \frac{1}{2} - 6 \right) \\ &= 3 \times \frac{5}{2} \times + 12 \\ &= \frac{15}{2} + 12 \\ &\Leftrightarrow 2^3 + 15 - 24 = 0 \end{aligned}$$

である。したがって、 x を解としてもつ3次方程式は、

$$2x^3 + 15x - 24 = 0$$

となる。

- (2)
- 直線PQの方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(t+1) - f(t-1)}{(t+1) - (t-1)} \{x - (t+1)\} + f(t+1) \\ &= \frac{\{(t+1)^3 - 4(t+1)\} - \{(t-1)^3 - 4(t-1)\}}{2} \{x - (t+1)\} + (t+1)^3 - 4(t+1) \\ &= 3(t^2 - 1) \{x - (t+1)\} + (t+1)^3 - 4(t+1) \end{aligned}$$

である。これと曲線 $y = f(x)$ の式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^3 - 4x &= 3(t^2 - 1) \{x - (t+1)\} + (t+1)^3 - 4(t+1) \\ \Leftrightarrow x^3 - (3t^2 + 1)x + 3(t^2 - 1)(t+1) - (t+1)^3 + 4(t+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - (3t^2 + 1)x + 2t(t+1)(t-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2t) \{x - (t+1)\} \{x - (t-1)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2t, t+1, t-1 \end{aligned}$$

となるから、直線PQと曲線 $y = f(x)$ の交点の x 座標は、

$$x = -2t, t+1, t-1$$

である。したがって、線分PQが曲線 $y = f(x)$ とP, Q以外の点で交わるための条件は、

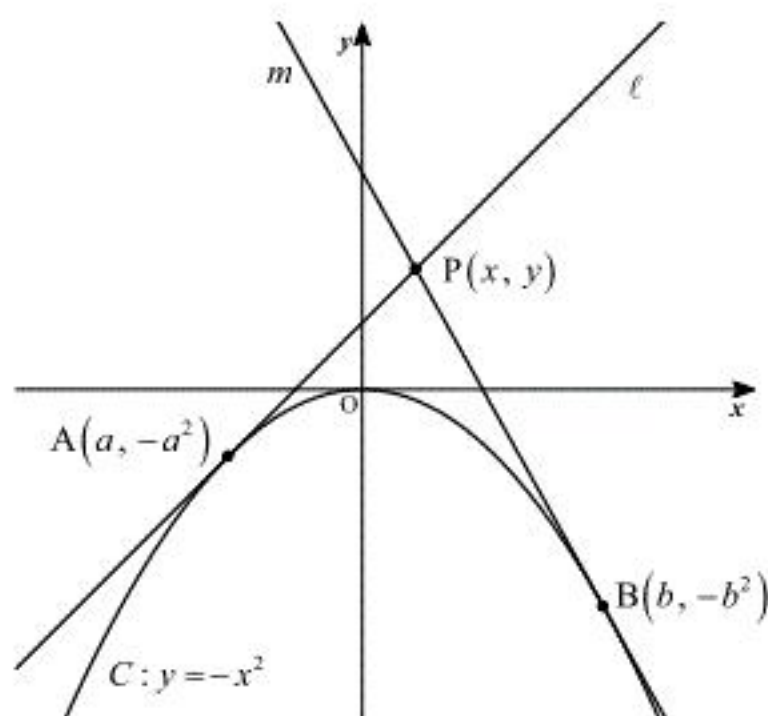
$$\begin{aligned} t-1 &< -2t < t+1 \\ \Leftrightarrow -1 &< 3t < 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3} &< t < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

2

- (1) ク 1 ケ 2 コ 1 サ 2 シ 1
 (2) ス 0 セ 4
 (3) ソ 2 タ 2 チ 3 ツ 4 テ 3
 ト 4 ナ 1 ニ 2 ノ 2

【解説】



(1)

$C: y = -x^2$ を x について微分すると
 $y' = -2x$

となるから、 ℓ, m の方程式は、

$$\begin{aligned}\ell: y &= -2a(x - a) - a^2 \\ \Leftrightarrow y &= -2ax + a^2 \\ m: y &= -2b(x - b) - b^2 \\ \Leftrightarrow y &= -2bx + b^2\end{aligned}$$

である。 ℓ, m の方程式を連立させて解くと、

$$\begin{aligned}-2ax + a^2 &= -2bx + b^2 \\ \Leftrightarrow 2(b - a)x &= (b - a)(b + a) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a + b}{2} \quad (\because a \neq b)\end{aligned}$$

であり、

$$y = -2a \cdot \frac{a + b}{2} + a^2 = -ab$$

である。したがって、点 $P(x, y)$ の各座標は、

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, y = -ab$$

となる。

(2)

ℓ と m が直交する条件は

$$\begin{aligned}(-2a) \cdot (-2b) &= -1 \\ \Leftrightarrow ab &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

であるから、点 $P(x, y)$ は常に、

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 4y + 1 &= 0\end{aligned}$$

を満たす。

(3)

ℓ, m が x 軸の正方向となす角を、それぞれ θ, ϕ ($0^\circ < \theta, \phi < 180^\circ$)とすると、

$$\begin{aligned}\tan \theta &= -2a \\ \tan \phi &= -2b\end{aligned}$$

である。ここで、 $\angle APB = 135^\circ$ のとき、
 $\theta = 135^\circ$ または $\phi = 45^\circ$

であるから

$$\begin{aligned}\tan(\theta - \phi) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\tan \theta - \tan \phi}{1 + \tan \theta \tan \phi} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{-2b + 2a}{1 - 4ab} &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 - 4ab &= 2(b - a) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。 $b - a > 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ において、

$$\begin{aligned}1 - 4ab &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 4y &> 0 \\ \Leftrightarrow y &< \frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。このとき、 $\textcircled{1}$ の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned}(1 - 4ab)^2 &= 4(b - a)^2 \\ \Leftrightarrow 1 - 8ab + 16(ab)^2 &= 4\{(a + b)^2 - 4ab\} \\ \Leftrightarrow 1 - 8y + 16y^2 &= 4(4x^2 + 4y) \\ \Leftrightarrow 16x^2 - 16y^2 + 24y - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 16x^2 - 16\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 + 1 &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

であり、 $P(x, y)$ は常にこの方程式をみたす。また、 $x = 0$ のとき $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned}2\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

となるが、 $y < \frac{1}{4}$ より、

$$y = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。

3

(1)	ネ	1	ノ	2						
(2)	ハ	2	ヒ	3	フ	5	ヘ	9	ホ	1
	マ	2	ミ	1	ム	3	メ	1	モ	2
(3)	ヤ	1	ユ	2	ヨ	1	ラ	2	リ	1
	ル	2								

【解説】

(1)

$M=2$ のとき、1回の試行で偶数のカードを取り出す確率は $\frac{1}{2}$ 、奇数のカードを取り出す確

率は $\frac{1}{2}$ である。したがって、確率 P_n と P_{n+1} の間に成り立つ関係式は

$$P_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot P_n + \frac{1}{2} \cdot (1 - P_n) = \frac{1}{2}$$

となる。ここで、

$$P_1 = \frac{1}{2}$$

であるから、任意の自然数 n について

$$P_n = \frac{1}{2}$$

が成り立つ。

(2)

$M=3$ のとき、1回の試行で偶数のカードを取り出す確率は $\frac{2}{3}$ 、奇数のカードを取り出す確

率は $\frac{1}{3}$ である。したがって

$$P_1 = \frac{2}{3}$$

$$P_2 = \frac{2}{3} \cdot P_1 + \frac{1}{3} \cdot (1 - P_1) = \frac{5}{9}$$

である。また、確率 P_n と P_{n+1} の間に成り立つ関係式は

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{2}{3} \cdot P_n + \frac{1}{3} \cdot (1 - P_n) \\ \Leftrightarrow P_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{3} \left(P_n - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} P_n - \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(P_1 - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow P_n &= \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow P_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3)

[1] M が偶数のとき

1回の試行で偶数のカードを取り出す確率は $\frac{1}{2}$ 、奇数のカードを取り出す確率は $\frac{1}{2}$ で

ある。したがって、確率 P_n と P_{n+1} の間に成り立つ関係式は

$$P_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot P_n + \frac{1}{2} \cdot (1 - P_n) = \frac{1}{2}$$

となる。ここで、

$$P_1 = \frac{1}{2}$$

であるから、任意の自然数 n について

$$P_n = \frac{1}{2}$$

が成り立つ。

[2] M が奇数のとき

1回の試行で偶数のカードを取り出す確率は、偶数のカードの枚数が $\frac{M+1}{2}$ 枚より、

$$\frac{\frac{M+1}{2}}{M} = \frac{M+1}{2M}$$

であり、奇数のカードを取り出す確率は、奇数のカードの枚数が $\frac{M-1}{2}$ 枚より、

$$\frac{\frac{M-1}{2}}{M} = \frac{M-1}{2M}$$

である。したがって、確率 P_n と P_{n+1} の間に成り立つ関係式は

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{M+1}{2M} \cdot P_n + \frac{M-1}{2M} \cdot (1 - P_n) \\ \Leftrightarrow P_{n+1} - \frac{1}{2} &= \frac{1}{M} \left(P_n - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} P_n - \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{M} \right)^{n-1} \left(P_1 - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow P_n &= \left(\frac{1}{M} \right)^{n-1} \left(\frac{M+1}{2M} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \quad \left(\because P_1 = \frac{M+1}{2M} \right) \\ \Leftrightarrow P_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} \right)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。