

1

- (1)

ア	1	イ	4	ウ	91	エ	36
オ	-7	カ	-5	キ	5	ク	-2
あ	(a)	い	(b)	う	(e)	け	4

【解説】

(1)

$$x \geq 6 \text{ となる確率} \rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$x \geq 5 \text{ となる確率} \rightarrow \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{4}{36}$$

$$x \geq 4 \text{ となる確率} \rightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{9}{36}$$

$$x \geq 3 \text{ となる確率} \rightarrow \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{16}{36}$$

$$x \geq 2 \text{ となる確率} \rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$x \geq 1 \text{ となる確率} \rightarrow \left(\frac{6}{6}\right)^2 = \frac{36}{36}$$

である。したがって、

$$x=6 \text{ となる確率} \rightarrow \frac{1}{36}$$

$$x=5 \text{ となる確率} \rightarrow \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

$$x=4 \text{ となる確率} \rightarrow \frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$$

$$x=3 \text{ となる確率} \rightarrow \frac{16}{36} - \frac{9}{36} = \frac{7}{36}$$

$$x=2 \text{ となる確率} \rightarrow \frac{25}{36} - \frac{16}{36} = \frac{9}{36} \left(= \frac{1}{4} \right)$$

$$x=1 \text{ となる確率} \rightarrow \frac{36}{36} - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

となる。よって、 x の期待値は

$$6 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 1 \cdot \frac{11}{36} = \frac{91}{36}$$

となる。

(2)

行列 A が表す一次変換により、点 $(3, -2)$ が点 (x_1, y_1) に移るとすると、

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。また、行列 A が表す一次変換により、点 (x_2, y_2) が点 $(3, 1)$ に移るとすると、

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(3)

まず、

$$f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 9 = 19 > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

であるから、 $1 \in A$ が成り立つ。また、

$$f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 18 \cdot 5 + 9 = -1 < 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから、 $5 \notin A$ が成り立つ。ここで、

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 18 = 3\{x - (3 + \sqrt{3})\}\{x - (3 - \sqrt{3})\}$$

であるから、 $x \leq -1$ においては $f'(x) > 0$ となり、 $f(x)$ は単調増加関数となる。これと

$$f(-1) = (-1)^3 - 9(-1)^2 + 18(-1) + 9 = -19$$

より、 $x \leq -1$ において、常に $f(x) \leq 0$ が成り立つ。したがって、 $\overline{A} \supset \overline{B} \Leftrightarrow A \subset B$ である。

また、

$$f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$$

$$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 9 = 17 > 0$$

$$f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 9 = 9 > 0$$

$$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 18 \cdot 4 + 9 = 1 > 0$$

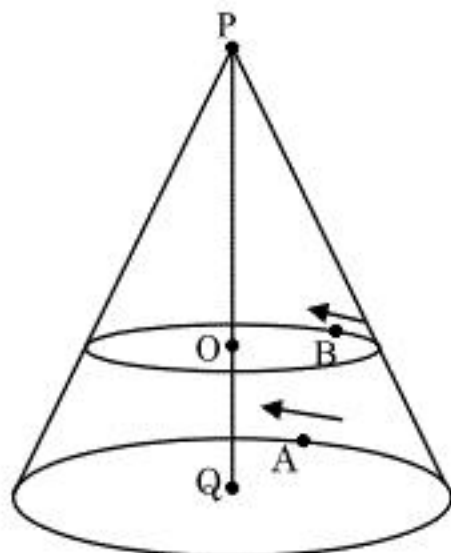
と①より $0, 1, 2, 3, 4 \in A$ であるが、②より $5 \notin A$ である。よって、 $a=4$ とすると $A \supset C$ が成り立つが、 $a=5$ とすると $A \supset C$ は成り立たなくなる。したがって、 $A \supset C$ となる最も大きい整数 a は

$$a=4$$

である。

コ	1	サ	1	シ	2	ス	17
セ	12	ソ	3	タ	13	チ	13
ツ	9	テ	6	ト	5		

【解説】



(1)

OP:OQ=2:1 より,

$$OP = 4\text{cm}, OQ = 2\text{cm}, OB = 2\text{cm}, QA = 3\text{cm}$$

である。したがって、A, B の角速度をそれぞれ、 ω_A, ω_B とおくと、

$$\omega_A = \frac{3\pi\text{cm/秒}}{QA} = \pi \text{ ラジアン/秒}$$

$$\omega_B = \frac{\pi\text{cm/秒}}{OB} = \frac{\pi}{2} \text{ ラジアン/秒}$$

となる。

(2)

以下、長さの単位は全て cm として省略する。

 $t=0$ のとき、 $A(3, 0, -2), B(2, 0, 0), O(0, 0, 0), P(0, 0, 4), Q(0, 0, -2)$ とおくと、

$$A(3\cos\pi t, 3\sin\pi t, -2), B\left(2\cos\frac{\pi}{2}t, 2\sin\frac{\pi}{2}t, 0\right)$$

と表せるから、

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= \left(3\cos\pi t - 2\cos\frac{\pi}{2}t\right)^2 + \left(3\sin\pi t - 2\sin\frac{\pi}{2}t\right)^2 + (-2-0)^2 \\ &= 9+4+4-12\left(\cos\pi t\cos\frac{\pi}{2}t + \sin\pi t\sin\frac{\pi}{2}t\right) \\ &= 17-12\cos\frac{\pi}{2}t \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$|\overline{AB}| = \sqrt{17-12\cos\frac{\pi}{2}t}$$

と求まる。

(3)

$$|\overline{OA}| = \sqrt{OQ^2 + QA^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|\overline{OB}| = 2$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 6\cos\pi t\cos\frac{\pi}{2}t + 6\sin\pi t\sin\frac{\pi}{2}t = 6\cos\frac{\pi}{2}t$$

であるから、

$$\cos\angle AOB = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OA}||\overline{OB}|} = \frac{6\cos\frac{\pi}{2}t}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\cos\frac{\pi}{2}t$$

と求まる。

(4)

三角形 AOB の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{|\overline{OA}|^2|\overline{OB}|^2 - (\overline{OA} \cdot \overline{OB})^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{13 \cdot 4 - 36\cos^2\frac{\pi}{2}t} \\ &= \sqrt{13-9\cos^2\frac{\pi}{2}t} \end{aligned}$$

となる。

(5)

 $t = \frac{1}{3}$ のとき、

$$A\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -2\right), B(\sqrt{3}, 1, 0)$$

である。H は平面 S 上にあるので、実数 x, y を用いて

$$\overline{OH} = x\overline{OA} + y\overline{OB}$$

と表せる。このとき、

$$\overline{QH} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + \sqrt{3}y \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}x + y \\ -2x + 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ①$$

となる。 S と ℓ が直交するから、

$$\overline{QH} \cdot \overline{OA} = 0, \overline{QH} \cdot \overline{OB} = 0$$

が成り立つ。計算すると、

$$\begin{aligned} \overline{QH} \cdot \overline{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y + \frac{27}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y + 4x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 13x + 3\sqrt{3}y &= 4 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{QH} \cdot \overline{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 3y + \frac{3\sqrt{3}}{2}x + y &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3\sqrt{3}}{4}x \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

となるので、③を②に代入して、

$$\begin{aligned} 13x - \frac{27}{4}x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{16}{25}, y = -\frac{12\sqrt{3}}{25} \end{aligned}$$

を得る。これを①に代入すると、

$$\overline{QH} = \frac{6}{25} \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$|\overline{QH}| = \frac{6}{25}\sqrt{4+12+9} = \frac{6}{5}$$

と求まる。

3

ナ	1	ニ	4	ヌ	3	ネ	4
ノ	2	ハ	2	ヒ	1	フ	2
ヘ	1	ホ	4				

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\{(1-t)-3t\} \\
 &= \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}(1-4t)
 \end{aligned}$$

となるので、 x の増減表は次のとおりである。

t	0	...	$\frac{1}{4}$	...	1
$\frac{dx}{dt}$	$\times$	+	0	-	$\times$
x	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

したがって、 x は $t=\frac{1}{4}$ のとき最大となる。同様にして、

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= \frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}} \\
 &= \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\{3(1-t)-t\} \\
 &= \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}(3-4t)
 \end{aligned}$$

となるので、 y の増減表は次のとおりである。

t	0	...	$\frac{3}{4}$	...	1
$\frac{dy}{dt}$	$\times$	+	0	-	$\times$
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

したがって、 y は $t=\frac{3}{4}$ のとき最大となる。

(2)

時刻 t における動点Pの速さは、

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{4}\sqrt{t^{-\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-4t)^2 + t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(3-4t)^2} \\
 &= \frac{1}{4}\sqrt{t^{-\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{2}}\{(1-t)(1-4t)^2 + t(3-4t)^2\}} \\
 &= \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}v(t) &= \frac{1}{4}\left\{-\frac{3}{4}t^{-\frac{7}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{7}{4}}\right\} \\
 &= \frac{3}{16}t^{-\frac{7}{4}}(1-t)^{-\frac{7}{4}}(2t-1)
 \end{aligned}$$

となるので、 $v(t)$ の増減表は次のとおりである。

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$\frac{d}{dt}v(t)$	$\times$	-	0	+	$\times$
$v(t)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$	$\times$

したがって、 $v(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ のとき最小となり、最小値は、

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。

(3)

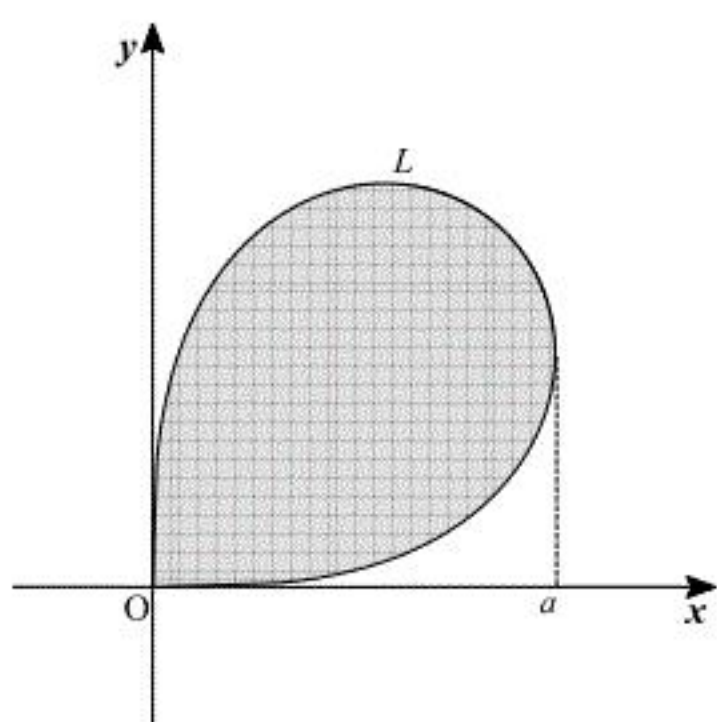
$$\begin{aligned}
 x &= y \\
 \Leftrightarrow t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}} &= t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}} \\
 \Leftrightarrow t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}} \left\{ (1-t)^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}} \right\} &= 0
 \end{aligned}$$

いま、 $t=0, 1$ 以外の点を考えるので、

$$\begin{aligned}
 (1-t)^{\frac{1}{2}} &= t^{\frac{1}{2}} \\
 \Leftrightarrow 1-t &= t \quad (\because 0 < t < 1) \\
 \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

と求まる。

(4)



求めるのは、上図の斜線部の面積である。ここで、 x の最大値を a とおいた。

$0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ に対応する y を y_1 、 $\frac{1}{4} \leq t \leq 1$ に対応する y を y_2 とすると、求める面積は、

$$\begin{aligned}
 -\int_0^a y_1 dx + \int_0^a y_2 dx &= -\int_0^{\frac{1}{4}} y_1 \frac{dx}{dt} dt + \int_{\frac{1}{4}}^1 y_2 \frac{dx}{dt} dt \\
 &= -\int_0^{\frac{1}{4}} y \frac{dx}{dt} dt \\
 &= -\int_0^{\frac{1}{4}} t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}(1-4t) dt \\
 &= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}} (1-4t) dt \\
 &= -\frac{1}{4}\left[t-2t^2\right]_0^{\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

である。

マ	6	ミ	3	ム	-1	メ	0
モ	2	ヤ	0	ユ	1	ヨ	3

【解説】

(1)

$\lceil \sqrt{1} \rceil = \lceil \sqrt{2} \rceil = \lceil \sqrt{3} \rceil = 1$ より, $n=1, 2, 3$ のときは条件を満たすので,

$$n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3$$

となる。さらに $n=4 \sim 8$ のとき, $\lceil \sqrt{n} \rceil = 2$ であるから,

$$n_4 = 4, n_5 = 6, n_6 = 8$$

となる。

(2)

$\lceil \sqrt{n} \rceil = p$ を満たす自然数 n は,

$$p^2 \leq n \leq (p+1)^2 - 1 = p(p+2)$$

である。このうち p の整数倍であるものは,

$$p^2, p(p+1), p(p+2)$$

の 3 個である。

(3)

(2)より,

$$n_{3k-2} = k^2, n_{3k-1} = k(k+1), n_{3k} = k(k+2)$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_{3k} &= \sum_{l=1}^{3k} n_l \\ &= \sum_{l=1}^k \{l^2 + l(l+1) + l(l+2)\} \\ &= \sum_{l=1}^k (3l^2 + 3l) \\ &= \frac{1}{2} k(k+1)(2k+1) + \frac{3}{2} k(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 2k \end{aligned}$$

と求まる。さらに,

$$S_{3k-1} = S_{3k} - n_{3k} = k^3 + 3k^2 + 2k - k(k+2) = k^3 + 2k^2$$

$$S_{3k-2} = S_{3k-1} - n_{3k-1} = k^3 + 2k^2 - k(k+1) = k^3 + k^2 - k$$

である。よって, $S_{3k-2}, S_{3k-1}, S_{3k}$ は共通の因数 k をもつ。

(4)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{S_{3k-2}}}{3k-2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{k^3 + k^2 - k}}{3k-2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}}}{3 - \frac{2}{k}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{S_{3k-1}}}{3k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{k^3 + 2k^2}}{3k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{k}}}{3 - \frac{1}{k}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{S_{3k}}}{3k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{k^3 + 3k^2 + 2k}}{3k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{k} + \frac{2}{k^2}}}{3} = \frac{1}{3}$$

となる。いずれも同じ値に収束するので,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{S_m}}{m} = \frac{1}{3}$$

である。