

(2011年度)

7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ, 4問である。)

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで, 問題冊子を開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に, 監督から指示があったら, 解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し, 氏名を記入すること。次に, 解答用紙の右側のミシン目にそって, きれいに折り曲げてから, 受験番号と氏名が書かれた切片を切り離し, 机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら, この問題冊子が, 上に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで, そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはならない。
6. 筆記具は, HかFかHBの黒鉛筆またはシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはならない。時計に組み込まれたアラーム機能, 計算機能, 辞書機能などを使用してはならない。
7. マークをするとき, 枠からはみ出したり, 枠のなかに白い部分を残したり, 文字や番号, 枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は, 消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり, 破ったりしてはならない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場してはならない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子, 計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

1

- (1) 立方体の各面に 1 ~ 6 の目が 1 つずつ書かれたサイコロを 2 つ振って、出た目の大きくない方を x とする。 $x = 2$ である確率は

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \text{ である。 } x \text{ の期待値は } \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \text{ である。}$$

- (2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ とする。行列 A が表す 1 次変換により、点 $(3, -2)$ は点 $\left(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}} \right)$ に移り、点 $\left(\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{ク}} \right)$ は点 $(3, 1)$ に移る。

- (3) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 18x + 9$ とし、

$$A = \{x \mid f(x) > 0\}, \quad B = \{x \mid x > -1\}$$

とする。次が成り立つ。

$$1 \boxed{\text{あ}} A, \quad 5 \boxed{\text{い}} A, \quad A \boxed{\text{う}} B$$

あ, い, う の選択肢

$$(a) \in \quad (b) \notin \quad (c) \ni \quad (d) \not\ni \quad (e) \subset \quad (f) \supset \quad (g) =$$

また、正の整数 a に対して、

$$C = \{x \mid 0 \leq x \leq a\}$$

とする。 $A \cap C$ となる最も大きい整数 a は $a = \boxed{\text{ケ}}$ である。

2

底面の円の半径が 3cm, 高さが 6cm の直円錐を考える。直円錐の頂点を P, 底面の円の中心を Q とし, 線分 PQ を 2 : 1 に内分する点を O とする。底面の円の円周を C_1 , O を通り底面と平行な平面が直円錐と交わってできる円の円周を C_2 とする。

2 点 A, B がそれぞれ C_1, C_2 上を頂点 P から見て左回りに移動している。点 A の速さは 3π cm/秒, 点 B の速さは π cm/秒であり, 時刻 $t = 0$ において, 3 点 P, B, A は一直線上にあるとする。

- (1) A の角速度は $\boxed{\text{コ}}$ π ラジアン/秒であり, B の角速度は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi$

ラジアン/秒である。ただし, A の角速度とは, 動径 QA が 1 秒間に回転する角の大きさのことであり, B の角速度とは, 動径 OB が 1 秒間に回転する角の大きさのことである。

- (2) 線分 AB の長さを時刻 t の関数で表すと

$$\sqrt{\boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}} \cos \frac{\pi}{2} t} \text{ cm}$$

である。

- (3) $\cos \angle AOB$ を時刻 t の関数で表すと

$$\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}} \cos \frac{\pi}{2} t$$

である。

- (4) 三角形 AOB の面積を時刻 t の関数で表すと

$$\sqrt{\boxed{\text{チ}} - \boxed{\text{ツ}} \cos^2 \frac{\pi}{2} t} \text{ cm}^2$$

である。

- (5) 3点 A, O, B を含む平面を S とする。Q を通り, S と直交する直線を ℓ とし, ℓ と S の交点を H とする。 $t = \frac{1}{3}$ のとき, 線分 QH の長さは

$$\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \text{ cm}$$

である。

- 3 座標平面において、動点 P の座標 (x, y) が時刻 t の関数として

$$x = t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}, \quad y = t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

で与えられている。

- (1) 動点 P の x 座標が最大になるのは $t = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のときであり、

y 座標が最大になるのは $t = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ のときである。

- (2) $0 < t < 1$ のとき、動点 P の速さの最小値は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

- (3) 動点 P が直線 $y = x$ 上に来るのは $t = 0$ のとき、 $t = \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ の

とき、 $t = 1$ のときの 3 回である。

- (4) t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、動点 P の描く曲線を L とす

る。 L で囲まれる図形の面積は $\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

4 実数 x に対し、 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。

自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 n が $[\sqrt{n}]$ の整数倍で表せるとき、そのような n を小さいものから順に並べて

$$n_1, n_2, n_3, \dots$$

とする。

(1) $n_5 =$ マ である。

(2) 自然数 p に対して、 $[\sqrt{n}] = p$ をみたす自然数 n の集合を M_p とする。 M_p の要素で p の整数倍であるものは全部で ミ 個ある。

(3) 自然数 m に対して、

$$S_m = \sum_{i=1}^m n_i$$

とおく。 $k \geq 1$ のとき、 $S_{3k-2}, S_{3k-1}, S_{3k}$ はいずれも k の多項式で、それぞれの k の 1 次項の係数は $S_{3k-2}, S_{3k-1}, S_{3k}$ の順に

ム, メ, モ である。また、 $S_{3k-2}, S_{3k-1}, S_{3k}$ は共通

の因数 $\left(k + \text{ヤ}\right)$ をもつ。

(4) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{S_m}}{m} = \frac{\text{ユ}}{\text{ヨ}}$ である。

