

ア	07	イ	03	ウ	07	エ	-01
オ	03	カ	02	キ	00	ク	04
ケ	07						

【解説】

(1)

与式は展開して次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
 y &= \sin x + 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= 2 \sin x + \sqrt{3} \cos x \\
 &= \sqrt{7} \sin(x + \alpha) \\
 (\alpha \text{ は } 0 \leq \alpha < 2\pi \text{ で, } \sin \alpha &= \sqrt{\frac{3}{7}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{ をみたす})
 \end{aligned}$$

$\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$ より $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるので、

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ のときに, 最大値 } \sqrt{7}$$

$$x = \pi \text{ のときに, 最小値 } -\sqrt{3}$$

をとる。

(2)

与式を変形すると以下のようになる。

$$xy = 4x - y + 28 \Leftrightarrow (x+1)y = 4x + 28$$

ここで $x = -1$ とすると、 $0 = 24$ となり矛盾する。

よって $x \neq -1$ としてよく

$$y = \frac{24}{x+1} + 4$$

を得る。

ここで、 y は整数であるので、 $\frac{24}{x+1}$ は整数にならなければならない。

$\frac{24}{x+1}$ を整数とするような、正の整数 x は 1, 2, 3, 5, 7, 11, 23 の 7 つである。

それぞれに正の整数 y が対応するので、与式を満たす (x, y) は 7 組ある。

(3)

平行移動した後の放物線は

$$y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

とかける。

①と $y = -x$ より

$$\frac{1}{2}x^2 + (a+1)x + b = 0$$

を得る。

①と $y = -x$ は接するので、この方程式の判別式は 0 となる。

よって

$$(a+1)^2 - 2b = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を得る。

①と $y = 3x$ より

$$\frac{1}{2}x^2 + (a-3)x + b = 0$$

を得る。

①と $y = 3x$ は接するので、この方程式の判別式は 0 となる。

よって

$$(a-3)^2 - 2b = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

を得る。

②③より

$$a = 1, b = 2$$

とわかる。

よって移動後の放物線は

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2}$$

である。

(4)

y を定数とみなし、与式を x の 2 次方程式

$$x^2 + yx + 2y^2 - 1 = 0$$

と考える。

x は実数であるので、この方程式の判別式を D とすると $D \geq 0$ となる。

よって

$$D = y^2 - 4(2y^2 - 1) = -7y^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{4}{7}$$

となる。

y は実数より、 $0 \leq y^2$ である。

以上より $0 \leq y^2 \leq \frac{4}{7}$ を得る。

コ	08	サ	07	シ	07	ス	01
セ	02	ソ	07	タ	01	チ	04
ツ	07	テ	03	ト	04	ナ	02
ニ	02	ヌ	07	ネ	14		

【解説】

(1)

$\theta = \angle ACB$ とおく。 $\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{3}{4}$$

である。したがって、 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

となる。ゆえに、外接円の半径を R とすれば、正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin \theta} = 2R \quad \therefore R = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{8}{7} \sqrt{7}$$

と求まる。

(2)

$\triangle ABC$ の面積を S とすれば、(1)の計算より、

$$S = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CA \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$= \frac{15}{4} \sqrt{7}$$

となる。一方、内接円の半径を r とすれば、

$$S = \frac{1}{2} (AB + BC + CA) r$$

が成り立つから、

$$\frac{15}{4} \sqrt{7} = \frac{1}{2} (4 + 6 + 5) r \quad \therefore r = \frac{1}{2} \sqrt{7}$$

x は実数であるので、この方程式の判別式を D とすると $D \geq 0$ となる。
よって

$$D = y^2 - 4(2y^2 - 1) = -7y^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{4}{7}$$

となる。

y は実数より、 $0 \leq y^2$ である。

以上より $0 \leq y^2 \leq \frac{4}{7}$ を得る。

と求まる。

(3)

円周角の定理より、 $\angle APB = 2\theta$ であるから、

$$\alpha = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle APB) = 90^\circ - \theta$$

となる。したがって、

$$\cos \alpha = \cos (90^\circ - \theta)$$

$$= \sin \theta$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{7}$$

である。

(4)

$$2\beta = \angle CAB$$

である。また、余弦定理より、

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos \angle CAB \quad \therefore \cos \angle CAB = \frac{1}{8}$$

であるから、 β が鋭角であることと、2倍角の公式より、

$$\frac{1}{8} = 2 \cos^2 \beta - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \cos \beta = \frac{3}{4}$$

と求まる。

(5)

Q から AB に下した垂線の足を H とすれば、

$$\sin \beta = \frac{QH}{AQ}$$

が成り立つ。ここで、 $QH = r$ であり、

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

であることから、

$$AQ = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = 2$$

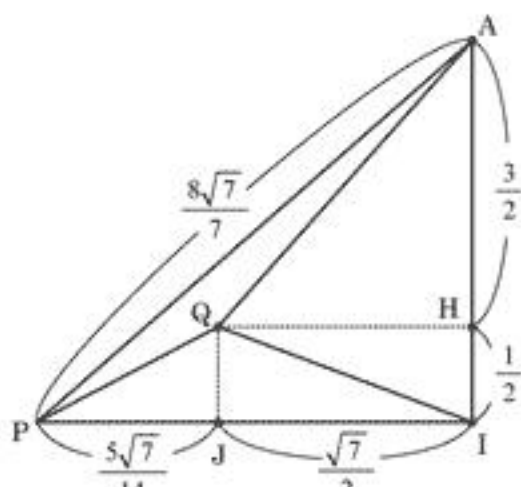
と求まる。

(6)

P から AB に下した垂線の足を I とし、 Q から PI に下した垂線の足を J とする。 PI は線分 AB の垂直二等分線ゆえ $AI = 2$ であり、また、

$$AH = QA \cos \beta = \frac{3}{2}, \quad PI = R \sin \alpha = \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

などから、下図が描ける。



よって、 $\triangle PQJ$ において三平方の定理より、

$$PQ^2 = QJ^2 + PJ^2 = \frac{8}{7} \quad \therefore PQ = \frac{2}{7} \sqrt{14}$$

と求まる。

(1)

2 と 7

(2)

(B), (C), (D), (G)

(3)

(B), (F), (G)

(4)

(A), (E), (G)

(5)

(A), (C)

【解説】

各条件(A)から(G)を満たすような、人口 10 万人以上の市の数の集合は下表のとおりである。

条件	市の数
(A)	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
(B)	{1}
(C)	{2, 3, 4, 5, 6}
(D)	{6}
(E)	{0, 1, 2, 3, 4, 5}
(F)	{0}
(G)	{1, 2, 3, 4, 5}

(1)

互いに否定条件となる組み合わせは、上表の市の数が互いに全体集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の補集合になっているものを考えればよいから、

2. (A) と (F) および 7. (D) と (E)

の 2 組である。

(2)

(A) であるための十分条件ということは、集合として $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に含まれるものを考えればよいから、そのような条件は

(B), (C), (D), (G)

である。

(3)

(E) であるための十分条件ということは、集合として $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ に含まれるものを考えればよいから、そのような条件は

(B), (F), (G)

である。

(4)

(B) であるための必要条件ということは、集合として $\{1\}$ を含むものを考えればよいから、そのような条件は

(A), (E), (G)

である。

(5)

(D) であるための必要条件ということは、集合として $\{6\}$ を含むものを考えればよいから、そのような条件は

(A), (C)

である。