

1

ア	20	イ	81	ウ	04	エ	02
オ	01	カ	-02	キ	-45		

【解説】

(1)

5桁であることから一万の位に0は来ない。

一万の位が1の数： $4! = 24$ 個一万の位が2の数： $4! = 24$ 個一万の位が3の数： $4! = 24$ 個

より、70番目の数の一万の位は3である。72番目の数からさかのぼって、

72番目：34210

71番目：34201

70番目：34120

となるから、70番目の数を100で割った余りは20である。

(2)

$$16^{\log_2 3} = (2^4)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^4 = 3^4 = 81$$

である。

(3)

 $1024 = 2^{10}$ であるから、 m は 2^k (k は自然数)の形である。したがって、

$$m^n = (2^k)^n = 2^{kn} = 2^{10}$$

となることから、指数10の約数の個数だけ、組 (m, n) は存在する。すなわち、

$$(m, n) = (2^1, 10), (2^2, 5), (2^5, 2), (2^{10}, 1)$$

の4組である。また、この中で、最小の m は $2^1 = 2$ 、最小の n は1である。

(4)

 p, q, r を0以上の整数、 $p+q+r=6$ とすると、 $1^p \cdot x^q \cdot (ax^2)^r$ の出てくる項は

$$\frac{6!}{p!q!r!} 1^p \cdot x^q \cdot (ax^2)^r = \frac{6!}{p!q!r!} a^r \cdot x^{q+2r}$$

となる。そこで x^4 の係数を求めるために、 $p+q+r=6$ 、 $q+2r=4$ となる数の組み合わせを考えて、次のように場合分けをする。[1] $r=0$ のときこのとき、 $q=4$ 、 $p=2$ となるから、係数は

$$\frac{6!}{2!4!0!} a^0 = 15$$

となる。

[2] $r=1$ のときこのとき、 $q=2$ 、 $p=3$ となるから、係数は

$$\frac{6!}{3!2!1!} a^1 = 60a$$

となる。

[3] $r=2$ のときこのとき、 $q=0$ 、 $p=4$ となるから、係数は

$$\frac{6!}{4!0!2!} a^2 = 15a^2$$

となる。

[4] $r \geq 3$ のとき、このとき、 $q < 0$ となり、条件をみたさないの、不適である。以上、[1]から[4]より、 x^4 の係数は、

$$15a^2 + 60a + 15 = 15(a+2)^2 - 45$$

となるから、 $a=-2$ のとき、最小値 -45 をとる。

ク	01	ケ	01	コ	-01	サ	02
シ	04	ス	00	セ	00	ソ	03
タ	03	チ	09	ツ	02	テ	07
ト	04	ナ	27	ニ	08	ヌ	02

【解説】

(1)

 C_a の式を平方完成して、

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4ax - 2a^2 + a + 1 \\ &= -2(x-a)^2 + a + 1 \end{aligned}$$

となることから、頂点は、 $(a, a+1)$ となり、常に、直線 $y=x+1$ 上にあることがわかる。

(2)

2 つの放物線の式から y を消去して、共有点の x 座標を解にもつ方程式を求めると、

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4ax - 2a^2 + a + 1 &= x^2 - 2x \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 2(2a+1)x + 2a^2 - a - 1 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。したがって、この方程式①の判別式を D として、求める条件は、

$$\begin{aligned} D/4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (2a+1)^2 - 3(2a^2 - a - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 7a - 4 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2a+1)(a-4) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq a \leq 4$$

となる。

(3)

 $a = -\frac{1}{2}$ を①に代入すると、

$$3x^2 = 0 \quad \therefore x = 0$$

となり、このとき、 C の方程式より、 $y=0$ となる。したがって、 C_a と C の共有点の座標は

$$P(0, 0)$$

となる。

(4)

 $a=4$ を①に代入すると、

$$\begin{aligned} 3x^2 - 18x + 27 &= 0 \Leftrightarrow 3(x-3)^2 = 0 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

となり、このとき、 C の方程式より、 $y=3^2-2\cdot 3=3$ となる。したがって、 C_a と C の共有点の座標は

$$Q(3, 3)$$

となる。

(5)

直線 PQ の方程式は、 $y=x$ である。 $0 \leq x \leq 3$ において、直線 $y=x$ の方が、放物線 C より上側にあるので、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^3 \{x - (x^2 - 2x)\} dx &= -\int_0^3 x(x-3) dx \\ &= \frac{1}{6}(3-0)^3 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

(6)

 $-\frac{1}{2} < a < 4$ のとき、 C_a と C の共有点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、これらは方程式①の

2 解であるから、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3}(2a+1), \alpha\beta = \frac{1}{3}(2a^2 - a - 1)$$

を満たす。区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において、 C_a が C よりも上側にあることから、2 曲線で囲まれた面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-2x^2 + 4ax - 2a^2 + a + 1 - (x^2 - 2x)\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} \{3x^2 - 2(2a+1)x + 2a^2 - a - 1\} dx \\ &= -3 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{3}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2} \{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta &= \frac{4}{9}(2a+1)^2 - \frac{4}{3}(2a^2 - a - 1) \\ &= \frac{4}{9}(-2a^2 + 7a + 4) \\ &= -\frac{8}{9}\left(a - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

と求まるから、 S は $a = \frac{7}{4}$ のとき最大であり、最大値は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{27}{2\sqrt{2}} = \frac{27}{8} \sqrt{2}$$

である。

3

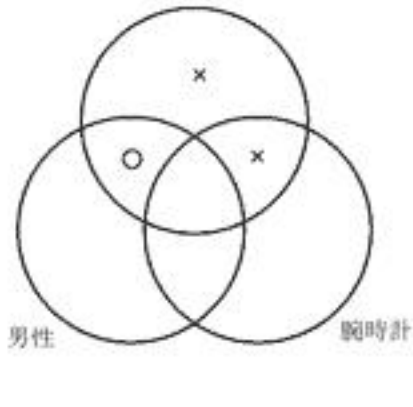
【解答】

- (1) (e) (2) z (3) (a), (f) (4) z (5) (d)

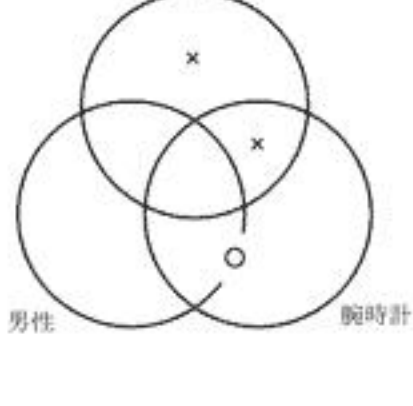
【解説】

各条件をベン図で表すと以下のようになる。ただし、○は存在する事を意味し、×は存在しない事を意味する。境界上に○がある場合は、いずれかが存在する事を意味する。

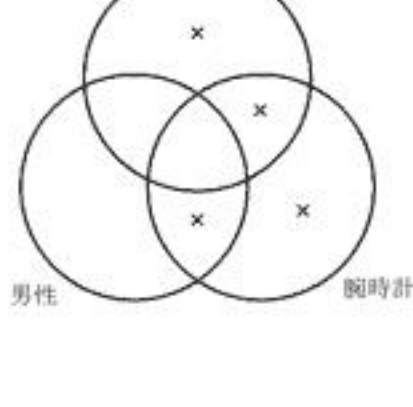
(A)



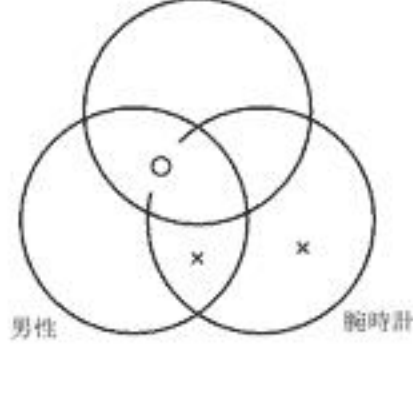
(B)



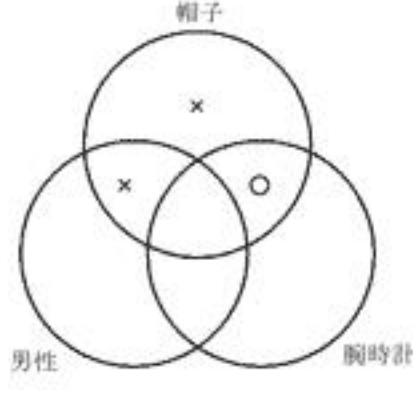
(C)



(D)



(E)



これらについて、性別と腕時計に関する条件だけ取り出し、「男女共に存在する」という前提条件を加えた図にすると、以下のようになる。

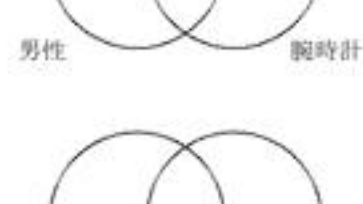
(A)



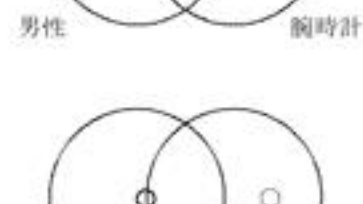
(B)



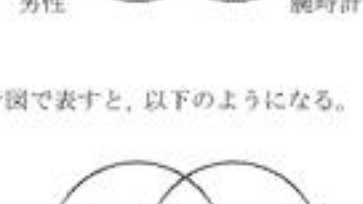
(C)



(D)

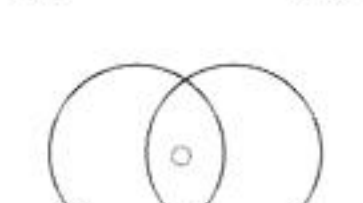


(E)

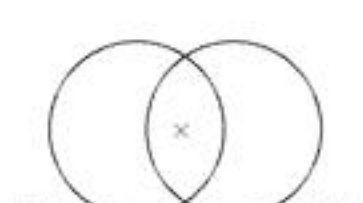


また、(a)～(f)の条件をベン図で表すと、以下のようになる。

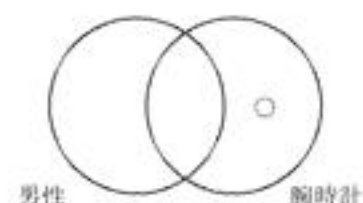
(a)



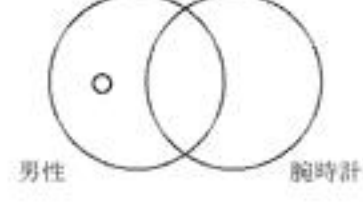
(b)



(c)



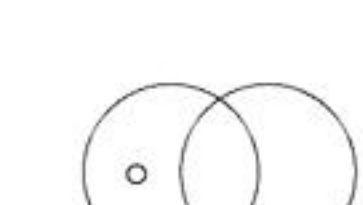
(d)



(e)



(f)



ここで、(a)～(f)の図には境界上の○が存在しない事に着目し、(A)～(E)の図から境界上の○を取り除くと、以下のようになる。

(A)



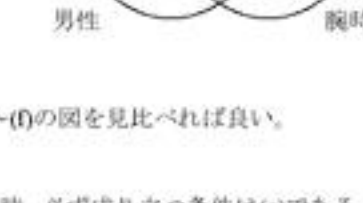
(B)



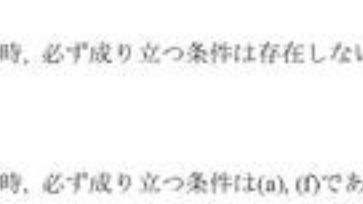
(C)



(D)



(E)



あとは、これらの図と(a)～(f)の図を見比べれば良い。

(1)

図より、(A)が成り立つ時、必ず成り立つ条件は(c)である。

(2)

図より、(B)が成り立つ時、必ず成り立つ条件は存在しない。よって、答えはzである。

(3)

図より、(C)が成り立つ時、必ず成り立つ条件は(a), (f)である。

(4)

図より、(D)が成り立つ時、必ず成り立つ条件は存在しない。よって、答えはzである。

(5)

図より、(E)が成り立つ時、必ず成り立つ条件は(d)である。