

1

【解答】

- (1)
 ア 4 イ -2 ウ 3 エ -3 オ 3
 (2)
 カ 1 キ 6 ク -1 ケ 2 コ 3
 サ 1 シ 2 ス 3
 (3)
 セ -15 ソ 4
 (4)
 タ 1 チ -2 ツ 3

【解説】

(1)

$$\begin{cases} \cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \\ \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(\cos \theta) &= \cos 3\theta - \sqrt{3} \cos 2\theta \\ &= (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) - \sqrt{3}(2\cos^2 \theta - 1) \\ &= 4\cos^3 \theta - 2\sqrt{3}\cos^2 \theta - 3\cos \theta + \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を得る。また、 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ に $x = \cos \theta$ を代入すると、

$$f(\cos \theta) = a\cos^3 \theta + b\cos^2 \theta + c\cos \theta + d \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。①と②は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす $\cos \theta$ について常に成り立つので、①と②の右辺の係数

を比較することによって、

$$a = 4, b = -2\sqrt{3}, c = -3, d = \sqrt{3}$$

が得られる。

(2)

$x = \cos \theta$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$0 \leq x \leq 1$$

である。したがって、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めればよい。

$f(x) = 4x^3 - 2\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3}$ であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - 4\sqrt{3}x - 3 \\ &= (6x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となるので、

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

と求まる。したがって、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は下のとおりである。

x	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{3} \\ f(1) = 1 - \sqrt{3} \\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

であるから、 $0 \leq x \leq 1$ において $f(x)$ は

$$\begin{aligned} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき} \quad & \text{最小値} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = 0 \text{ のとき} \quad & \text{最大値} \quad \sqrt{3} \end{aligned}$$

をとる。以上より、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において $f(\cos \theta)$ は

$$\begin{aligned} \theta = \frac{1}{6}\pi \text{ のとき} \quad & \text{最小値} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta = \frac{1}{2}\pi \text{ のとき} \quad & \text{最大値} \quad \sqrt{3} \end{aligned}$$

をとる。

(3)

$$\begin{aligned} \cos 3\theta - \sqrt{2} \cos 2\theta &\geq \alpha \cos \theta + \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow 4\cos^3 \theta - 2\sqrt{3}\cos^2 \theta - 3\cos \theta + \sqrt{3} &\geq \alpha \cos \theta + \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \cos \theta \{4\cos^2 \theta - 2\sqrt{3}\cos \theta - (3 + \alpha)\} &\geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となるので、③が常に成り立つような α の最大値を求めればよいが、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ なので、 $0 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから、

$$4\cos^2 \theta - 2\sqrt{3}\cos \theta - (3 + \alpha) \geq 0$$

が常に成り立つような α の最大値を求めればよい。 $g(x) = 4x^2 - 2\sqrt{3}x - (3 + \alpha)$ とおくと、 $g(x)$ は、

$$g(x) = 4\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{15}{4} + \alpha\right)$$

と平方完成できる。 $0 \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \leq 1$ であるから、軸が $0 \leq x \leq 1$ の中に存在する。 $y = g(x)$ は下に凸であるから、 $0 \leq x \leq 1$ において $g(x) \geq 0$ が常に成り立つ条件は

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) &= -\left(\frac{15}{4} + \alpha\right) \geq 0 \\ \therefore \alpha &\leq -\frac{15}{4} \end{aligned}$$

となる。以上より、 α の最大値は $-\frac{15}{4}$ と求まる。

(4)

(3)と同様に考えればよい。 $h(x) = 4x^2 - 2\sqrt{3}x - (3 + \beta)$ とおくと $0 \leq x \leq 1$ において $h(x) \leq 0$

が常に成り立つ β の最小値を求めればよい。(3)より、 $y = h(x)$ の軸は $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ であり、グラフは下に凸であるから、 $0 \leq x \leq 1$ において $h(x) \leq 0$ が常に成り立つ条件は

$$h(0) \leq 0 \quad \text{かつ} \quad h(1) \leq 0$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \begin{cases} h(0) = -(3 + \beta) \leq 0 \\ h(1) = 1 - 2\sqrt{3} - \beta \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \beta \geq -3 \quad \text{かつ} \quad \beta \geq 1 - 2\sqrt{3} \\ \therefore \beta \geq 1 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。以上より、 $h(x) \leq 0$ が常に成り立つときの β の最小値は $1 - 2\sqrt{3}$ となる。

【解答】

(1)

テ 2 ト 1 ナ 2

(2)

ニ 1 ヌ 3 ネ 5
ノ 4 ハ 3 ヒ 4 フ 3
ヘ 2 ホ 3 マ 2

【解説】

(1)

点Hは正方形ABCDの中心であるから

$$HA = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

となる。△APHにおいて三平方の定理より

$$\begin{aligned} PH &= \sqrt{PA^2 - HA^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 1^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

を得る。また、四角錐PABCDの体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2 = \frac{4}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と求まる。次に、球の半径を r とすると

$$V = \frac{1}{3} \times r \times (\text{正方形ABCDの面積} + \triangle PAB \text{の面積} \times 4) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここでABの中点をMとすると、 $MA = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるので、△APMにおいて三平方の定理より

$$PM = \sqrt{PA^2 - MA^2} = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

を得る。よって、△PABの面積は

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{2}$$

と求まる。したがって、②から

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times r \times \left\{ (\sqrt{2})^2 + \frac{3}{2} \times 4 \right\} \\ &= \frac{8}{3} r \end{aligned}$$

と表せる。これと①より、 V を消去して、

$$r = \frac{1}{2}$$

と求まる。

(2)

$\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$ をそれぞれ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ とすると

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{b}, \overrightarrow{PR} = \frac{1}{2} \overrightarrow{d}$$

となる。ここで点Sは3点Q, R, Cを含む平面上にあるので

$$\overrightarrow{CS} = \alpha \overrightarrow{CQ} + \beta \overrightarrow{CR}$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{PC} \\ &= \alpha \overrightarrow{PQ} + (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{PC} + \beta \overrightarrow{PR} \\ &= \frac{\alpha}{2} \overrightarrow{b} + (1 - \alpha - \beta) \overrightarrow{c} + \frac{\beta}{2} \overrightarrow{d} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。また、Sは線分PA上にあるので

$$\overrightarrow{PS} = t \overrightarrow{a}$$

とおける。ここで

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC}$$

なので

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}$$

と表せる。したがって

$$\overrightarrow{PS} = t \overrightarrow{b} - t \overrightarrow{c} + t \overrightarrow{d} \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。よって③、④より、 t, α, β を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} &= t, 1 - \alpha - \beta = -t, \frac{\beta}{2} = t \\ \therefore t &= \frac{1}{3}, \alpha = \beta = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$SP = |\overrightarrow{PS}| = |t \overrightarrow{a}| = t |\overrightarrow{a}| = \frac{1}{3} \sqrt{5}$$

である。

次に、△PAHと△SATは相似であるので

$$PA : SA = PH : ST = AH : AT$$

である。

$$SA = \frac{2}{3} \sqrt{5} \text{ より}$$

$$PA : SA = 3 : 2$$

なので

$$ST = \frac{4}{3}, AT = \frac{2}{3}$$

と求まる。

よって

$$\begin{aligned} CT &= AC - AT \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \frac{2}{3} \\ &= 2 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。対称性より△CRQと△SRQはともにRQを底辺とした二等辺三角形であるので、底辺の垂直二等分線を共有する。

よって四角形CRSQの面積を W 、RQの中点をNとすると

$$\begin{aligned} W &= \triangle CRQ \text{の面積} + \triangle SRQ \text{の面積} \\ &= \frac{1}{2} \times RQ \times (CN + SN) \\ &= \frac{1}{2} \times RQ \times SC \end{aligned}$$

と求まる。

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{b}, \overrightarrow{PR} = \frac{1}{2} \overrightarrow{d} \text{ より中点連結定理から}$$

$$RQ = \frac{1}{2} BD = 1$$

である。また△CSTにおいて三平方の定理より

$$\begin{aligned} SC &= \sqrt{ST^2 + CT^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。以上より、

$$W = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} \sqrt{2} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

と求まる。

〔解答〕

ミ	01	ム	01	メ	03	モ	04
ヤ	01	ユ	28	ヨ	05	ラ	14
リ	09	ル	28				

〔解説〕

(1)

9は全てのカードの中で最大の数であるから、取り出された3枚のカードの中に9は必ず含まれる。したがって、取り出された3枚のカードの中に9が書かれたカードが含まれる確率は1である。

(2)

9枚のカードを3枚ずつに無差別に分ければ取り出されるカードは自然に決まるから、全事象は、

$$\frac{{}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{3!} = 280 \text{ [通り]}$$

となる。取り出された3枚のカードの中に8が書かれたカードが含まれない確率を考える。8は9の次に大きい数字であるから、これは8と9が同じグループであるときのみ起こる。その確率は

$$\frac{3 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{3! \cdot 280} = \frac{70}{280} = \frac{1}{4}$$

である。

余事象を考えて、取り出された3枚のカードの中に8が書かれたカードが含まれる確率は

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

である。

(3)

取り出された3枚のカードの中に3が書かれたカードが含まれるのは、1つのグループが(1, 2, 3)で構成されているときである。その確率は

$$\frac{3 \cdot (1 \cdot {}_3C_3 \cdot {}_6C_3)}{{}_9C_3 \cdot {}_6C_3} = \frac{1}{28}$$

である。

(4)

取り出された3枚のカードの中に6が書かれたカードが含まれるのは、1つのグループが6と5以下の数字2つで構成されているときである。

その確率は

$$\frac{3({}_3C_2 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3)}{3! \cdot 280} = \frac{5}{14}$$

である。

(5)

取り出された3枚のカードに書かれた数の中で最小の数が6となるのは、取り出された3枚のカードが(6, 7, 9)または(6, 8, 9)となるときである。

(i) 取り出された3枚のカードが(6, 7, 9)であるとき

その確率は

$$\frac{3!({}_3C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_3C_3)}{3! \cdot 280} = \frac{3}{28}$$

である。

(ii) 取り出された3枚のカードが(6, 8, 9)であるとき

その確率は

$$\frac{3!({}_3C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_3C_3)}{3! \cdot 280} = \frac{3}{14}$$

である。

以上(i), (ii)より、取り出された3枚のカードに書かれた数の中で最小の数が6である確率は

$$\frac{3}{28} + \frac{3}{14} = \frac{9}{28}$$

である。