

1

【解答】

- (1) ア 1 イ 7 ウ 2 エ -1 オ 2 カ 2 キ 0
(2) ク 1 ケ 15 コ 1 サ 3
(3) シ 1 ス 4 セ 1 ソ 8

【解説】

- (1) $t = \sin x$ とおくと、 $-1 \leq t \leq 1$ のもとで

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| 2\sin x - \cos 2x + \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) + \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| 2t^2 + 2t - \frac{1}{2} \right| \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(t) = 2t^2 + 2t - \frac{1}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} g(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 + 4t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となり

$$\frac{-1 - \sqrt{2}}{2} < -1 < \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} < 1$$

であるから

$$|g(t)| = \begin{cases} -\left(2t^2 + 2t - \frac{1}{2}\right) & (-1 \leq t \leq \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}) \\ 2t^2 + 2t - \frac{1}{2} & (\frac{-1 + \sqrt{2}}{2} < t \leq 1) \end{cases}$$

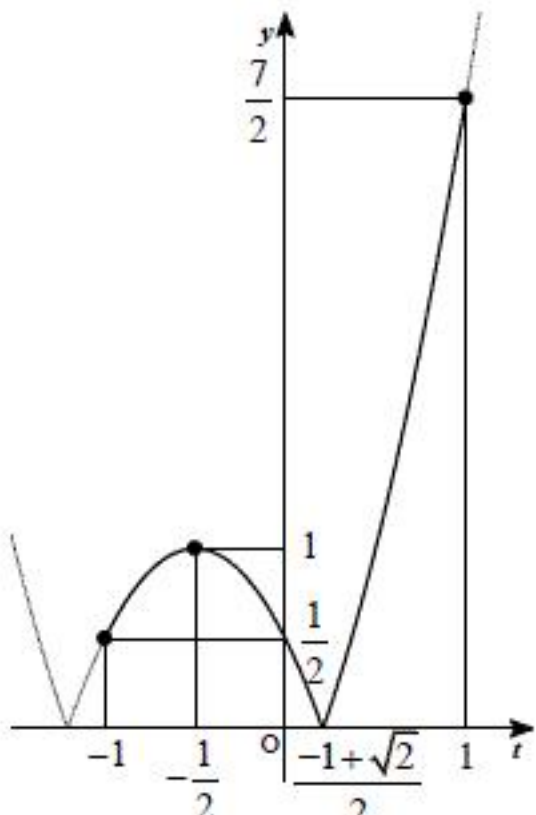
となる。また

$$g(t) = 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

であり

$$-1 < -\frac{1}{2} < \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$$

となる。以上より、関数 $y = |g(t)|$ のグラフの概形は下図のようになる。



以上より、 $f(x) (= |g(t)|)$ は

$$\begin{aligned} (t =) \sin x = 1 \text{ のとき最大値 } &\frac{7}{2} \\ (t =) \sin x = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} \text{ のとき最小値 } &0 \end{aligned}$$

をとる。

- (2)

$$0 \leq x \leq y \leq z \leq \frac{4}{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + 2y + z = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。②より

$$x = 1 - 2y - z$$

であるから、①より

$$\begin{aligned} x &\leq y \\ \Leftrightarrow 1 - 2y - z &\leq y \\ \Leftrightarrow \frac{1 - z}{3} &\leq y \end{aligned}$$

となる。さらに、②より $z \leq \frac{4}{5}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1 - z}{3} &\geq \frac{1 - \frac{4}{5}}{3} \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{15} \leq \frac{1 - z}{3} \leq y$$

となる。よって、 y の最小値は $\frac{1}{15}$ であり、このときの x, z の値は $x = \frac{1}{15}, z = \frac{4}{5}$ となる。また、

②より

$$z = 1 - 2y - x$$

であるから、①より

$$\begin{aligned} y &\leq z \\ \Leftrightarrow y &\leq 1 - 2y - x \\ \Leftrightarrow y &\leq \frac{1 - x}{3} \end{aligned}$$

となる。さらに、②より $0 \leq x$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1 - x}{3} &\leq \frac{1 - 0}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

より

$$y \leq \frac{1 - x}{3} \leq \frac{1}{3}$$

となる。よって、 y の最大値は $\frac{1}{3}$ であり、このときの x, z の値は $x = 0, z = \frac{1}{3}$ となる。

- (3)

不等式

$$\log_2 x + 6\log_x 2 \geq 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

について対数の底と真数の条件より

$$x > 0, x \neq 1$$

である。このもとで、 $X = \log_2 x$ とおくと $X \neq 0$ であり

$$\begin{aligned} \log_2 x + 6\log_x 2 &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \log_2 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_2 x} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow X + \frac{6}{X} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow X^3 + 6X &\geq X^2 \\ \Leftrightarrow X(X + 2)(X - 3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2 \leq X < 0, 3 \leq X \quad (\because X \neq 0) \end{aligned}$$

となる。よって、求める不等式③の解は

$$\begin{aligned} -2 \leq \log_2 x < 0, 3 \leq \log_2 x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x < 1, x \geq 8 \end{aligned}$$

である。

【解答】

- (1) タ -4 チ -2 ツ -2 テ 1 ト 1
- (2) ナ -2 ニ 6 ヌ -1 ネ 4 ノ 12 ハ 2 ヒ 64 フ 3
- (3) ヘ 177 ホ 8 マ -1 ミ 8

【解説】

(1)

$f(x)=x^2, g(x)=-(x-a)^2+2a+b$ とおくと、 $C_1:y=f(x), C_2:y=g(x)$ の共有点の x 座標は、 x についての方程式

$$f(x)=g(x)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-2ax+a^2-2a-b=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の解である。よって、 C_1, C_2 が共有点をもつための条件は、 $\textcircled{1}$ の判別式を D' とすると

$$D' \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (-a)^2-2(a^2-2a-b) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2-4a-2b \leq 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 $\textcircled{2}$ より

$$b \geq \frac{1}{2}(a^2-4a)$$

となり

$$\frac{1}{2}(a^2-4a)=\frac{1}{2}(a-2)^2-2$$

であるから、 a が実数であるとき

$$\frac{1}{2}(a^2-4a) \geq -2$$

となる。よって、 b のとりうる値の範囲は

$$b \geq -2$$

であり、 $b=-2$ のとき $a=2$ となるから、 $\textcircled{1}$ は

$$2x^2-4x+2=0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x=1$$

となる。このとき $f(1)=1$ であるから、 C_1, C_2 はただ1つの共有点 $(1, 1)$ をもつ。

(2)

$b=6$ とすると、 $\textcircled{2}$ より C_1, C_2 が共有点をもつとすると

$$a^2-4a-12 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-6)(a+2) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq a \leq 6 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

である。ここで、 C_1, C_2 の共有点の x 座標を $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$ とおくと、 α, β は $\textcircled{1}$ の解であるから

$$g(x)-f(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)$$

となり、また $\textcircled{1}$ において解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=a$$
$$\alpha\beta=\frac{a^2-2a-b}{2}$$

となる。 C_1 と C_2 で囲まれた図形 D の面積 S は

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=-2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{3}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\left(a^2-4\cdot\frac{a^2-2a-b}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}(-a^2+4a+2b)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}(-a^2+4a+12)^{\frac{3}{2}} (\because b=6)$$

と表される。さらに

$$-a^2+4a+12=-\left(a-2\right)^2+16$$

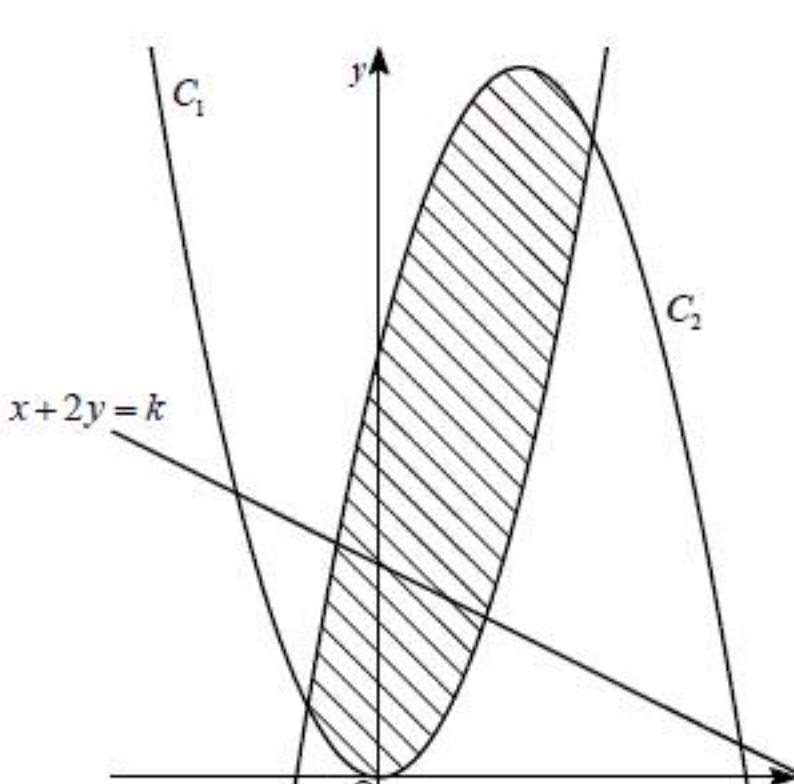
であり、 $a=2$ は $\textcircled{3}$ を満たすから $-a^2+4a+12$ は $a=2$ のとき最大値16をとり、このとき S も最大となるから、 S は

$$a=2 \text{ のとき最大値 } \frac{1}{3}(16)^{\frac{3}{2}}=\frac{64}{3}$$

をとる。

(3)

$a=2, b=6$ とすると、 $C_1:y=x^2, C_2:y=-(x-2)^2+10$ となる。このとき、 C_1, C_2 で囲まれた図形 D_0 は下図斜線部のようになる。



C_1, C_2 の共有点の x 座標は $\textcircled{1}$ より

$$x^2-2x-3=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1, 3$$

となるから、 C_1, C_2 の共有点の座標は $(-1, 1), (3, 9)$ である。 $x+2y=k$ とおくと、点 $P(x, y)$ が D_0 内を動くときの $x+2y$ の最大値・最小値は、直線 $x+2y=k$ が D_0 と共有点をもつときの k

の最大値・最小値となる。直線 $x+2y=k$ の傾きは $-\frac{1}{2}$ であり、 C_2 上の点 $(3, 9)$ における接線の傾きは -1 であるから、 k が最大値をとるのは C_2 と直線 $x+2y=k$ が接するときである。このときの接点の x 座標は

$$g'(x)=-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2(x-2)=-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$$

であり、接点の座標は $\left(\frac{9}{4}, \frac{159}{16}\right)$ であるから、求める $x+2y$ の最大値は

$$\frac{9}{4}+2\cdot\frac{159}{16}=\frac{177}{8}$$

となる。また、直線 $x+2y=k$ の傾きは $-\frac{1}{2}$ であり、 C_1 上の点 $(-1, 1)$ における接線の傾きは -2

であるから、 k が最小値をとるのは C_1 と直線 $x+2y=k$ が接するときである。このときの接点の x 座標は

$$f'(x)=-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$$

であり、接点の座標は $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$ であるから、求める $x+2y$ の最小値は

$$-\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{16}=-\frac{1}{8}$$

となる。

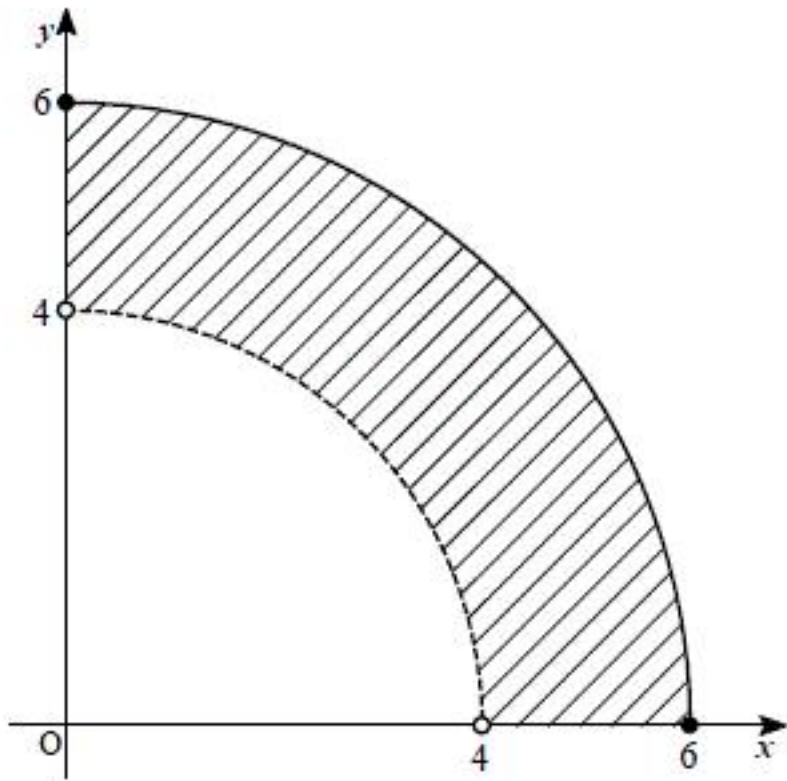
3

【解答】

- (1) △ 18
(2) メ 11
(3) (i) モ 3 ヤ 3 ユ 5 ヨ 16
(ii) ラ 2 リ 5 ル 16
(iii) レ 45 ロ 8

【解説】

- (1) $x \geq 0, y \geq 0, 16 < x^2 + y^2 \leq 36$ で表される領域を図示すると下図斜線部のようになる。ただし、境界は実線部のみであり、破線部は含まない。

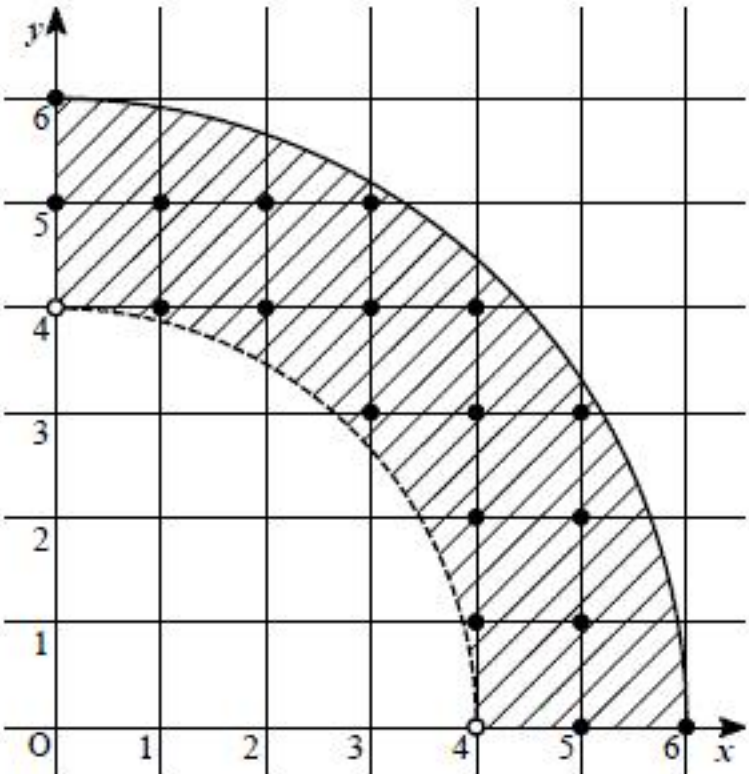


上図より、 x のとり得る値の範囲は $0 \leq x \leq 6$

となる。これより、 A に含まれる点 (x, y) について

- $x=0$ のとき、 $y \geq 0, 16 < y^2 \leq 36$ より $y=5, 6$
 $x=1$ のとき、 $y \geq 0, 15 < y^2 \leq 35$ より $y=4, 5$
 $x=2$ のとき、 $y \geq 0, 12 < y^2 \leq 32$ より $y=4, 5$
 $x=3$ のとき、 $y \geq 0, 7 < y^2 \leq 27$ より $y=3, 4, 5$
 $x=4$ のとき、 $y \geq 0, 0 < y^2 \leq 20$ より $y=1, 2, 3, 4$
 $x=5$ のとき、 $y \geq 0, -9 < y^2 \leq 11$ より $y=0, 1, 2, 3$
 $x=6$ のとき、 $y \geq 0, -20 < y^2 \leq 0$ より $y=0$

となる。以上より、格子点の集合 A は下図の黒点のようになる。



よって、 A の点は全部で18個ある。

- (2) (1)の結果より、 A_0 の点は $(0, 5), (1, 4), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 1), (5, 0)$ の7個あるから、 P が到達できない A の点は全部で $18 - 7 = 11$ 個ある。

- (3) A_0 の点について、その点に至る経路、経路数、確率、到達する時間は下の表のようになる。ただし、 P が上に進むことを $\uparrow$ 、右に進むことを $\rightarrow$ とそれぞれ表すこととし、経路について()の中身は順番が任意であることを表す。

A_0 の点	経路	経路数	確率	到達する時間
$(0, 5)$	$\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$	${}_5C_0 = 1$	$\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$	5秒
$(1, 4)$	$(\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow)$	${}_5C_1 = 5$	$\frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}$	5秒
$(2, 4)$	$(\uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow \rightarrow) \uparrow$	${}_5C_2 = 10$	$\frac{10}{2^6} = \frac{5}{32}$	6秒
$(3, 3)$	$(\uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow)$	${}_6C_3 = 20$	$\frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}$	6秒
$(4, 2)$	$(\uparrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow) \rightarrow$	${}_5C_3 = 10$	$\frac{10}{2^6} = \frac{5}{32}$	6秒
$(4, 1)$	$(\uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow)$	${}_5C_4 = 5$	$\frac{5}{2^5} = \frac{5}{32}$	5秒
$(5, 0)$	$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$	${}_5C_5 = 1$	$\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$	5秒

- (i) 上の表より経路の数が最も多い点は $Q(3, 3)$ であり、この点に到達する確率は $\frac{5}{16}$ である。

- (ii) Q の次に経路が多い点は $(2, 4), (4, 2)$ の2点ある。それらの点のいずれかで P が停止する確率は $\frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{5}{16}$ である。

- (iii) P が A_0 の点のいずれかで停止するまでの時間の期待値は $5 \times \frac{1}{32} + 5 \times \frac{5}{32} + 6 \times \frac{5}{32} + 6 \times \frac{5}{16} + 6 \times \frac{5}{32} + 5 \times \frac{5}{32} + 5 \times \frac{1}{32} = \frac{45}{8}$ 秒である。