

〔解答〕

(1)

ア 8 イ 4

(2)

ウ 50 エ 101 オ 17 カ 11 キ 8 ク 1

〔解説〕

(1)

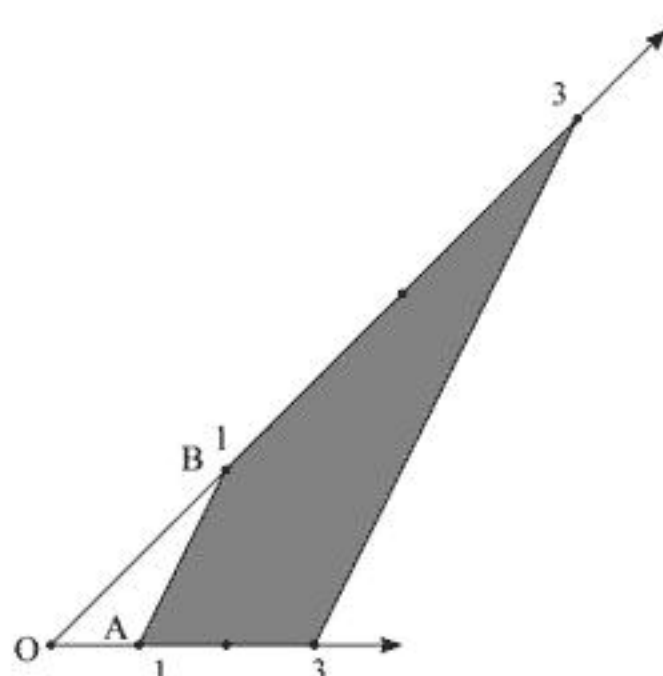
(i)

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = (s+t)\frac{s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}}{s+t} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}}{s+t}$$

とおくと、 $s \geq 0, t \geq 0$ であることから、点Hが存在しうる範囲は線分ABである（端点を含む）。①より、 $\overrightarrow{OP} = (s+t)\overrightarrow{OH}$ ($1 \leq s+t \leq 3$)であるから、点Pが存在しうる範囲は以下の斜線部である（境界線を含む）。



斜線部の面積は、

$$(3^2 - 1^2)S = 8S$$

である。

(ii)

$$2t = u, \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \text{ とすると, } \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OC}, s \geq 0, u \geq 0, 1 \leq s+u \leq 3 \text{ のときに点P}$$

が存在しうる範囲を考えることになる。(1)より、その範囲は△OACの面積の8倍である。

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \text{ より, } \triangle OAB \text{ の面積 } S \text{ は } \triangle OAC \text{ の面積の } 2 \text{ 倍であるので, 点Pが存在しうる}$$

範囲の面積はSの4倍である。

(2)

2項定理より

$$\left(\sqrt{2}x + \sqrt[4]{2}\right)^{100} = \sum_{p=0}^{100} {}_{100}C_p \left(\sqrt{2}x\right)^p \cdot \left(\sqrt[4]{2}\right)^{100-p} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とかける。よって、 x^{100} の係数は

$${}_{100}C_{100} \left(\sqrt{2}\right)^{100} \cdot \left(\sqrt[4]{2}\right)^0 = 2^{50}$$

である。

$$\text{さて, ①より } x^n \text{ の係数は, } {}_{100}C_n \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left(\sqrt[4]{2}\right)^{100-n} = {}_{100}C_n 2^{\left(\frac{100-n}{k} - \frac{n}{k} + \frac{n}{2}\right)} \text{ である。}$$

これが整数となるようなnの個数を考える。

[1] $k=2$ のとき

x^n の係数は ${}_{100}C_n 2^{50}$ なので、nによらず x^n の係数は整数となる。

よって、 x^n の係数が整数となるようなnは101個である。

[2] $k=3$ のとき

x^n の係数は ${}_{100}C_n 2^{\left(\frac{200+n}{6}\right)}$ である。

よって、これが整数になるのは、 $200+n$ が6の倍数になるときであり、

$$n = 4 + 6m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 16)$$

のときである。これより、 x^n の係数が整数となるようなnは17個である。

[3] $k=5$ のとき

x^n の係数は ${}_{100}C_n 2^{\left(\frac{200+3n}{10}\right)}$ である。

よって、これが整数になるのは、 $200+3n$ が10の倍数になるときであり、

$$n = 10m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 10)$$

のときである。これより、 x^n の係数が整数となるようなnは11個である。

[4] $k=7$ のとき

x^n の係数は ${}_{100}C_n 2^{\left(\frac{200+5n}{14}\right)}$ である。

よって、これが整数になるのは、 $200+5n$ が14の倍数になるときであり、

$$n = 2 + 14m \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 7)$$

のときである。これより、 x^n の係数が整数となるようなnは8個である。

[5] $k=51$ のとき

x^n の係数は ${}_{100}C_n 2^{\left(\frac{200+49n}{102}\right)}$ である。

よって、これが整数になるのは、 $200+49n$ が102の倍数になるときであり、

$$n = 100 + 102m \quad (m = 0)$$

のときである。これより、 x^n の係数が整数となるようなnは1個である。

〔解答〕

ケ	4	コ	-2	サ	4	シ	1	ス	-1
セ	2	ソ	11	タ	96	チ	0	ツ	-1
テ	1	ト	2	ナ	-1	ニ	2	ヌ	1
ネ	2	ノ	-1	ハ	1	ヒ	2	フ	-3
ヘ	2	ホ	3	マ	8				

〔解説〕

(1)

真数条件より、

$$\begin{cases} 2y+1>0 \\ x>0 \\ y>0 \\ 4-2x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2 \\ y>0 \end{cases}$$

となる。また与式を変形すると、

$$\log_2(2y+1)-1 \leq \log_2 x \leq 2+\log_2 y \leq \log_2 x + \log_2(4-2x)$$

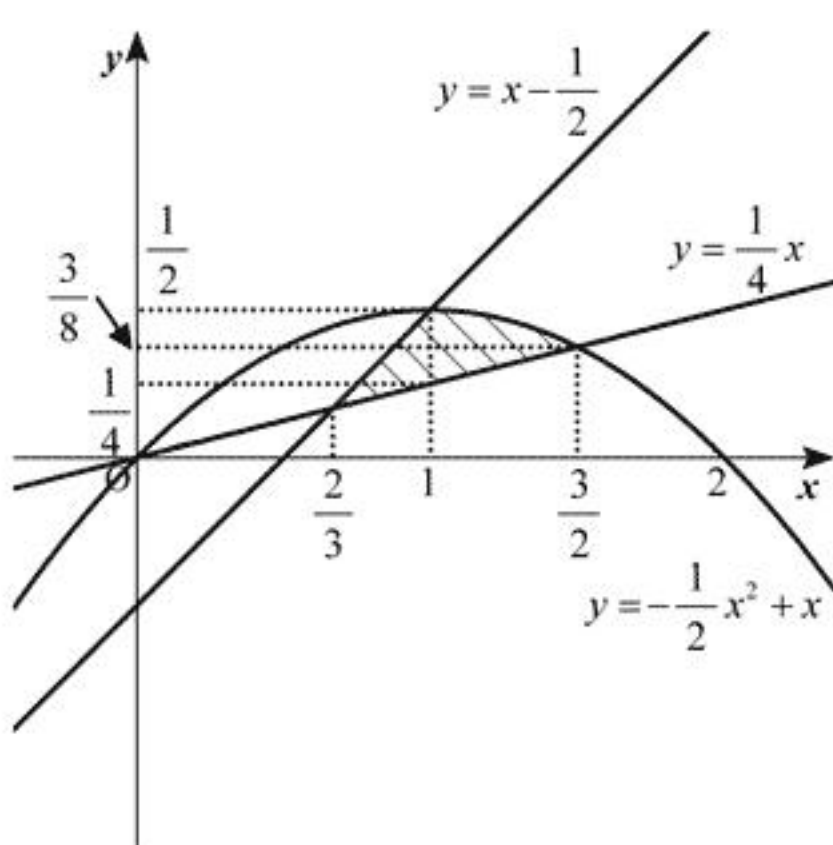
$$\Leftrightarrow \log_2\left(y+\frac{1}{2}\right) \leq \log_2 x \leq \log_2 4y \leq \log_2 x(4-2x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。底が1より大きいので、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y+\frac{1}{2} \leq x \leq 4y \leq x(4-2x)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4y \leq -2x^2+4x \quad \text{かつ} \quad y \leq x-\frac{1}{2}$$

となる。上の不等式が表す領域を図示すると次図斜線部のようになる（境界線含む）。

したがって、この不等式が表す領域は真数条件を満たすので、領域 D を表す不等式は、

$$x \leq 4y \leq -2x^2+4x \quad \text{かつ} \quad y \leq x-\frac{1}{2}$$

である。

(2)

求めるのは(1)の図の斜線部の面積なので、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x^2 + x \right) - \frac{1}{4}x \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8}x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{24} - \frac{1}{6} \left(\frac{27}{8} - 1 \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{9}{4} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{24} - \frac{1}{6} \cdot \frac{19}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{1}{96} (4 - 38 + 45) \\ &= \frac{11}{96} \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

 $k = y - sx$ とおくと、

$$y = sx + k$$

であるから、直線 $y = sx + k$ が領域 D と交点をもつように動く時の y 切片の最大値が $f(s)$ となる。 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$ の $\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$ における接線の傾きは、それぞれ $0, -\frac{1}{2}$ であるから、以下、 $f(s)$ を s の値によって場合分けして求める。[1] $0 \leq s < 1$ のとき、(1)の図より、直線 $y = sx + k$ が $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ を通るときに k は最大となる。したがって、

$$f(s) = \frac{1}{2} - s \cdot 1 = -s + \frac{1}{2}$$

と求まる。

[2] $-\frac{1}{2} \leq s < 0$ のとき、(1)の図より、直線 $y = sx + k$ が $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$ に接するときに k は最大となる。2式から、 y を消去すると、

$$x^2 + 2(s-1)x + 2k = 0$$

となる。よって、2式が接する条件は、判別式を D として

$$\frac{D}{4} = (s-1)^2 - 2k = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}(s-1)^2 = \frac{1}{2}s^2 - s + \frac{1}{2}$$

と求まる。以上より、

$$f(s) = \frac{1}{2}s^2 - s + \frac{1}{2}$$

である。

[3] $s < -\frac{1}{2}$ のとき、(1)の図より、直線 $y = sx + k$ が $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$ を通るときに k は最大となる。したがって、

$$f(s) = \frac{3}{8} - \frac{3}{2} \cdot s = -\frac{3}{2}s + \frac{3}{8}$$

と求まる。

以上より、

$$f(s) = \begin{cases} -s + \frac{1}{2} & (0 \leq s < 1) \\ \frac{1}{2}s^2 - s + \frac{1}{2} & (-\frac{1}{2} \leq s < 0) \\ -\frac{3}{2}s + \frac{3}{8} & (s < -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

である。

〔解答〕

ミ	17	ム	3	メ	1	モ	27	ヤ	4
ユ	81	ヨ	19	ラ	54	リ	2	ル	1
レ	4	ロ	-2						

〔解説〕

(1)

1からは4または5に進む。2からは4, 5または6に進む。3からは5または6に進む。つまりスタートから, 4に進む方法は2通り, 5に進む方法は3通り, 6に進む方法は2通りである。また, 4からは7または8の2通りの移動を, 5からは7, 8または9の3通りの移動を, 6からは8または9の2通りの移動を実行する。したがって, Aの進み方は,

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 17 \text{ (通り)}$$

である。また移動の確率が最も小さいのは, $2 \rightarrow 5 \rightarrow (7 \text{ または } 8 \text{ または } 9)$ の進み方であり, その方法は3通りである。また確率は,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

である。

(2)

まずAについて考える。Aが奇数番号のマスだけを通るのは,

(1または3) $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ (7または9)という方法である。この場合の確率は,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

である。AとBは, その移動の方法, 確率是对称的であり, 互いの移動は独立であるから, 求める確率は,

$$\left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{4}{81}$$

である。

(3)

それぞれのマスをA, Bがともに通る確率を考える。

(i) 4を通るとき

まず, Aが4を通る方法は, $1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 4$ の2通りであり, その確率は,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

である。AとBの対称性から, とともに4を通る確率は,

$$\left(\frac{5}{18}\right)^2 = \frac{25}{324}$$

である。

(ii) 5を通るとき

Aが5を通る方法は, $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 5$ の3通りであり, (i)と同様に対称性も考慮して, このときの確率は,

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

である。

(iii) 6を通るとき

この場合は2, 5, 8のマスからなる軸に関して, (i)の場合を対称移動させた場合である。よ

って確率は(i)の場合に等しく $\frac{25}{324}$ である。

以上から, AとBが中段のマスで同じマスを通る確率は,

$$\frac{25}{324} \cdot 2 + \frac{16}{81} = \frac{19}{54}$$

である。

(4)

次の2つの場合が考えられる。

[1] AとBのスタート地点はそれぞれの行の両端いずれかであり, それぞれは互いに同じ列にある。さらに, AとBは対角線に沿って進む。

[2] AとBのスタート地点はそれぞれの行の両端いずれかであり, それぞれは互いに異なる列にある。AとBは, まず $n+1$ 行 $n+1$ 列のマスまで対角線に沿って進んだ後, もう一方の対角線に沿って進む。

[1]の場合

このときの確率は, AとBの対称性に注意して,

$$\left\{ \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \right\}^2 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{3^{4n-2}}$$

である。

[2]の場合

このときの確率は,

$$\left\{ \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \right\}^2 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{3^{4n-2}}$$

である。

以上から, 求める確率は,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{3^{4n-2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{3^{4n-2}} = \frac{1}{(2n+1)^2 3^{4n-2}}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} p &= 2n+1 \\ q &= 4n-2 \end{aligned}$$

である。