

1

〔解答〕

(1)

ア 9 イ 21

(2)

ウ 1 エ 3

(3)

オ 4 カ 41

〔解説〕

(1)

与式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_4 32x - \log_8 64x + \log_{16} 8x \\ &= \frac{\log_2 32x}{\log_2 4} - \frac{\log_2 64x}{\log_2 8} + \frac{\log_2 8x}{\log_2 16} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{\log_2 x}{2} - 2 - \frac{\log_2 x}{3} + \frac{3}{4} + \frac{\log_2 x}{4} \\ &= \frac{5}{4} + \frac{5}{12} \log_2 x \end{aligned}$$

よって、 $5 \leq f(x) \leq 10$ となるための必要十分条件は

$$5 \leq f(x) \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq \frac{5}{4} + \frac{5}{12} \log_2 x \leq 10$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq \log_2 x \leq 21$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^9 \leq \log_2 x \leq \log_2 2^{21}$$

である。底が2であるので、

$$2^9 \leq x \leq 2^{21}$$

と求まる。以上より、

$$a=9, b=21$$

である。

(2)

半角公式より

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}, \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

であるので

$$\begin{aligned} g(x) &= 4\cos^2 \frac{x}{2} + 2\sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin x \\ &= \cos x + \sqrt{3} \sin x + 3 \\ &= 2\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 3 \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、 $0 \leq x < 2\pi$ より、 $x = \frac{1}{3}\pi$ のとき $g(x)$ は最大値をとる。

(3)

$m \geq n$ より、3 辺の長さの大小関係は

$$m+1 > m \geq n$$

となる。よって直角三角形の斜辺の長さは $m+1$ であるから、三平方の定理より

$$m^2 + n^2 = (m+1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{n^2-1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。また3 辺の長さの和が100 以下より

$$n+m+(m+1) \leq 100 \Leftrightarrow n^2+n \leq 100 (\because \textcircled{1}) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで n は正の整数であるので②をみたす n は1 から9 の9 つある。

そのうち m が正の整数となり、かつ $m \geq n$ をみたすものを考えると

$$(m, n) = (4, 3), (12, 5), (24, 7), (40, 9)$$

の4 通りが見つかる。また直角三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times m \times n = \frac{mn}{2}$$

であるので、この4 つのなかで面積が最大となるのは $n=9$ のときである。以上より、面積が最大となるときの斜辺の長さは41 である。

2

【解答】

(1)

キ 2 ク -1 ケ 1

(2)

コ 4 サ 3 シ -1 ス 1
セ 1 ソ 2 タ 3 チ 2

(3)

ツ 1 テ 2 ト 1 ナ 4
ニ 3 ノ 8 ノ 2

【解説】

(1)

A(a, a-1) を通り, 放物線

$$y = x^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

に接する直線の方程式は, 傾きを k として

$$y = k(x-a) + a-1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

のように表すことができる。①と②から y を消去すると,

$$\begin{aligned} x^2 &= k(x-a) + a-1 \\ \Leftrightarrow x^2 - kx + ka - a + 1 &= 0 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。①と②が接するための条件は, x の 2 次方程式③の判別式 D が $D=0$ を満たすことであるので,

$$\begin{aligned} D &= k^2 - 4(ka - a + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 4ak + 4a - 4 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。この k に関する方程式を解くと

$$k = 2a \pm \sqrt{4a^2 - (4a - 4)} = 2(a \pm \sqrt{a^2 - a + 1}) \quad (\text{それぞれ } k_-, k_+ \text{ とおく})$$

となるので, 直線 ℓ の傾きは, 上の 2 解のうち大きい方

$$2(a + \sqrt{a^2 - a + 1})$$

である。

(2)

点 P, Q の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 ($x_1 < x_2$ としてよい) とおく。また, 直線 PQ の方程式を $y = f(x)$ とおくと, $f(x)$ は 1 次式なので,

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \{f(x) - x^2\} dx = \int_{x_1}^{x_2} \{-(x-x_1)(x-x_2)\} dx$$

のように表せる。ここで,

$$\int_a^b (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

であるから,

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} \{-(x-x_1)(x-x_2)\} dx \\ &= \frac{1}{6}(x_2-x_1)^3 \end{aligned}$$

のようになる。また,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{k_- \pm \sqrt{D}}{2} = a - \sqrt{a^2 - a + 1} \quad (\because D=0) \\ x_2 &= \frac{k_+ \pm \sqrt{D}}{2} = a + \sqrt{a^2 - a + 1} \quad (\because D=0) \\ \therefore x_2 - x_1 &= 2\sqrt{a^2 - a + 1} \end{aligned}$$

であるから,

$$S = \frac{1}{6} \left(2\sqrt{a^2 - a + 1} \right)^3 = \frac{4}{3} (a^2 - a + 1)^{\frac{3}{2}}$$

と表せる。

また,

$$a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

より, $a = \frac{1}{2}$ のとき S は最小値

$$\frac{4}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

をとる。

(3)

直線 $y = x-1$ との距離が最小になる放物線 $y = x^2$ 上の点においては, 放物線の接線の傾きが 1 となる。

$$y' = 2x = 1$$

を計算することにより, この点の x 座標が $\frac{1}{2}$ であることがわかる。よって, 直線 $y = x-1$ との

距離が最小になる放物線 $y = x^2$ 上の点の座標は

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

である。この点と直線 $y = x-1$ の距離は, 点と直線の距離の公式より

$$\frac{\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -\frac{3}{4} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{8} \sqrt{2}$$

と求まる。

3

【解答】

(1)

ノ 5 ハ 7 ヒ 8

(2)

フ 1 ヘ 2 ホ 1 マ 1

ミ 2 ム 1 メ 2

(3)

モ 3 ヤ -3 ユ 2 ヨ 1

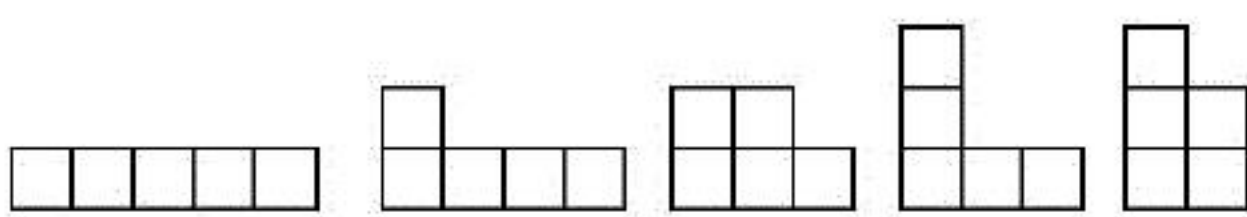
ラ 3 リ -3 ル 2 レ 1

ロ 2 ワ 3 ヲ 3 ン 1

【解説】

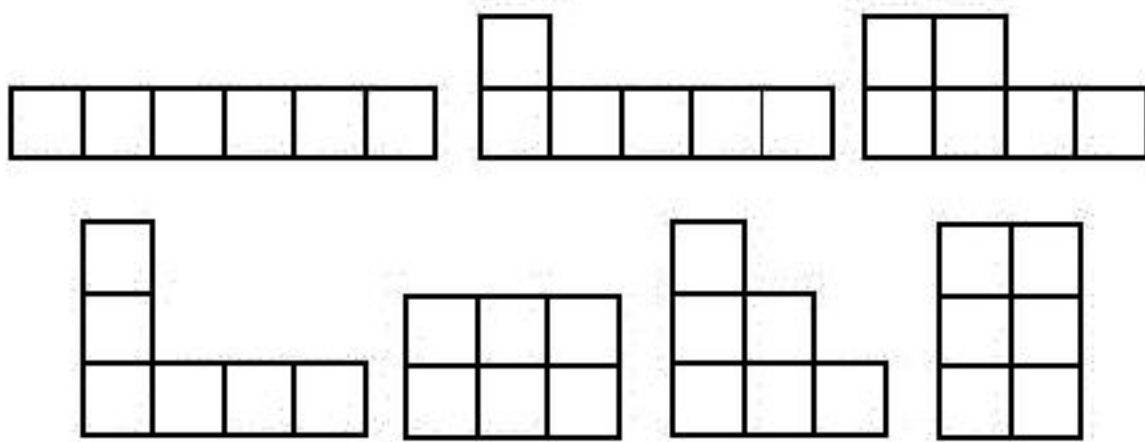
(1)

[1] $N=5$ のとき



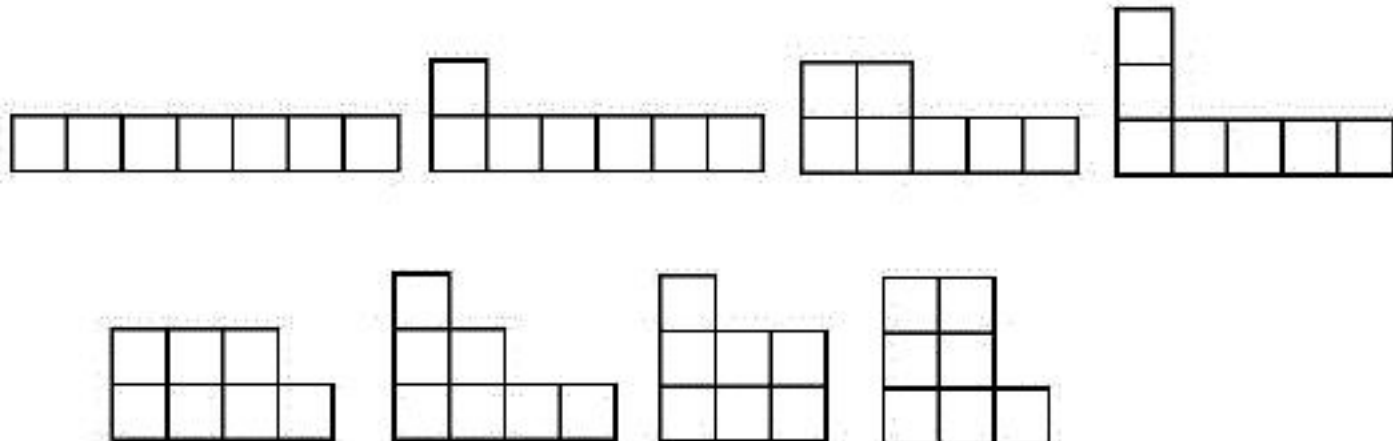
並べ方は上図のような 5 通りである。

[2] $N=6$ のとき



並べ方は上図のような 7 通りである。

[3] $N=7$ のとき



並べ方は上図のような 8 通りである。

(2)

[1] N が偶数のとき

下の段の正方形の数が $\frac{N}{2}$ よりも小さいと、上の段にすべての正方形をのせられなくなってしまうので、下の段の正方形の個数として可能なのは、

$$\frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1, \frac{N}{2}+2, \dots, N$$

である。よって、 N が偶数のとき、高さが 2 段までの並べ方は

$$N - \frac{N}{2} + 1 = \frac{N}{2} + 1 \text{ 通り}$$

である。

[2] N が奇数のとき

下の段の正方形の数が $\frac{N+1}{2}$ よりも小さいと、上の段にすべての正方形をのせられなくなってしまうので、下の段の正方形の個数として可能なのは、

$$\frac{N+1}{2}, \frac{N+1}{2}+1, \frac{N+1}{2}+2, \dots, N$$

である。よって、 N が奇数のとき、高さが 2 段までの並べ方は

$$N - \left(\frac{N+1}{2} \right) + 1 = \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \text{ 通り}$$

である。

(3)

3 段目が m 個のとき、1 段目と 2 段目に使える正方形は $N-m=6n-m$ 個である。

[1] m が偶数のとき

1 段目（最下段）の正方形の個数が最小となるのは、1 段目と 2 段目の正方形の個数が等しくなるとき、つまり $\frac{6n-m}{2}$ 個になるときである。また、1 段目の正方形の個数が最大になるのは、2 段目の正方形が m 個のときであるから、このとき 1 段目の正方形は $(6n-m)-m=6n-2m$ 個

である。

よって、1 段目の正方形の個数として可能なのは、

$$\frac{6n-m}{2}, \frac{6n-m}{2}+1, \frac{6n-m}{2}+2, \dots, 6n-2m$$

であるから、並べ方は

$$a_m = (6n-2m) - \left(3n - \frac{m}{2} \right) + 1 = 3n - \frac{3}{2}m + 1 \text{ 通り}$$

である。

[2] m が奇数のとき

1 段目の正方形の個数が最小となるのは、2 段目の正方形の個数よりも 1 つだけ多くなる時、つまり $\frac{6n-m+1}{2}$ 個になるときである。また、1 段目の正方形の個数が最大になるのは、2 段目の正方形が m 個のときであるから、このとき 1 段目の正方形は [1] と同様に $6n-2m$ 個である。

よって、1 段目の正方形の個数として可能なのは、

$$\frac{6n-m+1}{2}, \frac{6n-m+1}{2}+1, \frac{6n-m+1}{2}+2, \dots, 6n-2m$$

であるから、並べ方は

$$a_m = (6n-2m) - \frac{6n-m+1}{2} + 1 = 3n - \frac{3}{2}m + \frac{1}{2} \text{ 通り}$$

である。

m の取りうる範囲は

$$0 \leq m \leq \frac{N}{3} = 2n \text{ (3 段とも正方形の数が等しいとき } m \text{ は最大)}$$

であるから、 $N=6n$ のとき、高さが 3 段までの並べ方は全部で

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{2n} a_m &= \sum_{k=0}^n a_{2k} + \sum_{k=1}^n a_{2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(3n - \frac{3}{2} \cdot 2k + 1 \right) + \sum_{k=1}^n \left(3n - \frac{3}{2} (2k-1) + \frac{1}{2} \right) \\ &= \left\{ (n+1)(3n+1) - 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \right\} + \left\{ n(3n+2) - 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\ &= (n+1)(3n+1) - 3n(n+1) + n(3n+2) \\ &= (n+1) \cdot 1 + n(3n+2) \\ &= 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

通りである。